

Ürmössy Károly

Elméleti Fizikai Osztály, Wigner FK

Elméleti Fizika Tanszék, ELTE

**Nem-extenzív statisztikus fizikai
módszerek a nagyenergiás spektrumok
értelmezésében**

Doktori értekezés

Témavezető:

Biró Tamás Sándor, DSc

Tudományos tanácsadó, Elméleti Fizikai Osztály, Wigner FK

Doktori iskola:

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizikai Doktori Iskola

Doktori program:

Részecskefizika és csillagászat

A doktori iskola és program vezetője:

Csikor Ferenc, DSc.

2012. november

Kivonat

Ezen doktori értekezés nehézion, proton-proton, proton-antiproton és elektron-pozitron ütközésekben mért hadronspektrumok nem-extendív statisztikus fizikai értelmezéseit mutatja be. A dolgozat magyarázatot kíván nyújtani arra, miért tapasztalhatók egyensúlyi egyrészecske eloszlások a részecske-gyorsítóknban mért, robbanásszerű, ezért feltehetőleg nem-egyensúlyi folyamatokban keletkező hadronok spektrumaiban. Ennek érdekében a dolgozat számos termikus illetve nem-egyensúlyi, extendív illetve nem-extendív, kanonikus és mikrokanonikus statisztikus hadronizációs modellt vet össze a kortárs nagyenergiás gyorsító kísérletek (LEP, SPS, RHIC, Tevatron, LHC) eredményeivel.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1 Statisztikus viselkedés gyorsítós kísérletekben	4
1.2 Az értekezés felépítése	7
1.3 Nem-extenzív rendszerek egyensúlyban	8
2. Egyrészecke eloszlás nem-extenzív rendszerekben	15
2.1 Kanonikus eloszlás, <i>nagy eltérések tétele</i>	15
2.2 Mikrokanonikus eloszlás	17
3. Szuperstatisztikai megközelítés	21
3.1 Multiplicitás fluktuációk, KNO skálázás	21
3.2 Kanonikus eloszlás	22
3.3 Mikrokanonikus eloszlás	23
3.4 A nem-extenzivitás és a szuper-statisztika kombinációja	24
3.4.1 Nem-extenzív kölcsönhatások és fluktuáló multiplicitás a kanonikus közelítésben	24
3.4.2 Nem-extenzív kölcsönhatások és fluktuáló multiplicitás mikrokanonikusan	26
4. Általánosított-statisztikus hadronizációs modellek	27
4.1 Termikus hadronkeltés kvark koaleszcenciával	28
4.2 Nem-extenzív kvarkanyag hadronizációja rezonancia bomlással	36
4.3 Szuperstatisztikus <i>jet</i> -fragmentáció	41
5. Elméleti eredményeim összehasonlítása a kísérletekkel	48
5.1 Nehézion ütközésekben mért azonosított hadronok spektrumai	48
5.2 Proton-proton és proton-antiproton ütközésekben mért töltött hadronok spektrumai	52
5.3 Elektron-pozitron ütközésekben mért fragmentációs függvények és multiplicitás-eloszlások	56
6. Záró	74
7. Appendix	76
7.0.1 Ultra-relativisztikus klasszikus gáz mikrokanonikus sokasága	76

7.0.2	Nem-extenzív ultra-relativisztikus klasszikus gáz mikrokanonikus sokasága	77
7.0.3	2+2 dimenziós koordináták Minkowski téridőben	78
7.0.4	Ekvipartíció Tsallis-Pareto eloszlásra	80

1. fejezet

Bevezetés

Az erős kölcsönhatás leírására kifejlesztett mértékelmélet, a kvantum színdinamika (quantum chromodynamics, QCD) alapvető problémája, hogy keretei közt nem kezelhető a hadronizáció folyamata, mivel ezen folyamat energiaskálája a $\Lambda_{QCD} \approx 200$ MeV nagyságrendjébe esik, a QCD pedig ezen a tartományon nem oldható meg a perturbáció-számítás segítségével. Az erős kölcsönhatás tanulmányozására létrehozott kísérletekben azonban nem választhatóak szét a nagy impulzuscserével járó, perturbatív és a kis impulzuscserével járó, perturbatíván nem kezelhető folyamatok. Ilymódon sok mérési eredmény, mint pl. a nagyenergiás ütközésekben keltett hadronok spektrumainak értelmezéséhez elkerülhetetlen a hadronizáció folyamatának megértése.

Az ütközésekben keletkező *jetek* vezető partonjainak fragmentációjára (a sugárzás közvetítésével történő hadronkeltésre) léteznek ugyan az irodalomban elvétve, főleg nehéz kvarkok hadronkeltésének leírására használt nem-perturbatív elméleti modellek (ld. a [96] - [98] referenciákat), de a perturbatív QCD (pQCD) alapú parton-modell számolásokban leggyakrabban elektron-pozitron annihilációs kísérletekben mért hadronspektrumok alapján beparaméterezett, fenomenológikus függvényeket használnak. A parton-modell számítások azonban, a perturbációszámítás korlátai miatt, nem alkalmasak a hadronspektrumok alacsonyabb energiás tartományának számolására (ez a tartomány proton-proton ütközések esetében $p_T \leq 2$ GeV, nehézion ütközések esetében pedig $p_T \leq 4\text{-}5$ GeV, ahol p_T az ütközésekben keltett hadronok nyalábirányra merőleges impulzusa).

Enyhít a helyzeten, hogy egyes mennyiségek, mint pl. az alacsony energiás spektrumok leírhatók egyszerű, statisztikus modellek segítségével. Ezen dolgozat célja az általam továbbfejlesztett statisztikus hadronizációs modellek bemutatása, illetve elhelyezése az ezirányú kortárs kutatási eredmények körében.

1.1. Statisztikus viselkedés gyorsító kísérletekben

Az elektron-pozitron annihilációkban mért hadron multiplicitás-eloszlások, valamint az SPS, RHIC és LHC energiákon megmért, proton-proton és atommag-atommag ütközésekben keltett hadronok transzverz momentum spektrumai az alacsony impulzusú, $p_T \leq 2\text{-}3$ GeV tartományon jól illeszthetők Boltzmann-Gibbs eloszlásra épülő termális modellekre (ld. az [54] - [65] cikkeket az atommag-atommag ütközések, valamint a [66] cikket az elektron-pozitron ütközések vizsgálatáról). Ezen modellek azon a Hagedorn által az [54] cikkben javasolt feltevésen alapulnak, hogy nagyenergiás részecskeütközésekben kis, forró „anyagcseppek”, „tűzgömbök” keletkeznek, amelyekben az anyag gyorsan termikus egyensúlyba kerül, és a cseppek hadronizációja után a szétrepülő hadrongáz öröklő a csepp Boltzmann-eloszlását, melynek spektrális hőmérséklete megegyezik a csepp hadronizáció pillanatában való hőmérsékletével. (Spektrális hőmérséklet alatt az $f(\epsilon)$ eloszlás $T_{st} = -\partial\epsilon/\partial \ln f(\epsilon)$ mennyisége értendő.)

Ahhoz, hogy a modellek az SPS és RHIC energiás nehézion kísérletek esetében is illeszthetők legyenek az egyes hadronok transzverz momentum és pseudo-rapidity eloszlásaira, valamint azimutális szöggörrelációira, fel kellett tételni, hogy az ütközésben keletkező anyag tágul. (pseudo-rapidity alatt az $\eta = (1/2) \ln[(E + p_{||})/(E - p_{||})]$ mennyiséget értik, melyben E a detektált részecske energiája, $p_{||}$ pedig az impulzusának a nyaláb irányára vett vetülete) Kiderült, hogy a kísérletekkel jól egyező eredmények érhetőek el, ha a keletkező anyag tágulását valamilyen relativisztikus hidrodinamikai modell egyszerű megoldásával vesszük figyelembe, valamint feltételezzük, hogy a hadronizáció egyszerű téridő hiperfelületek mentén megy végbe (ld. a [11] - [14] és [71] referenciákat), a hadronizációt pedig az áramló kvarkanyaggal együtt mozgó rendszerben termális kvarkok koaleszcenciájával írják le.

A termális modellek sikerének két oka lehet. Az egyik, hogy a RHIC (a brookhaveni Relativistic Heavy-ion Collider) és LHC (Large Hadron Collider gyorsító a svájci CERN-ben) energiás nehézion ütközésekben létrejövő kvark-gluon plazma színes szabadsági fokai között elég nagyok az ütközési hatáskeresztmetszetek ahhoz, hogy a plazma rövid élettartama ellenére, az anyag lokálisan egyensúlyi állapotba kerüljön. (*Quark-Gluon Plasma*, QGP - az ütközésekben létrejövő nagy energiasűrűségeken a kvantum színdinamika aszimptotikus szabadsága (ld. [1] referencia) lehetővé teszi, hogy a nukleonokat alkotó kvark és gluon szabadsági fokok kiszabaduljanak, és kb. 10^{-24} s időtartam erejéig színesen töltött anyag jöjjön létre.) Ezt a forgatókönyvet ugyan nem igazolja, de alátámasztja a *jet*-elnyomás jelensége (a jelenség kísérleti kimutatásról ld. az [5] cikket, az elméleti háttérrel pedig a [6] referenciát), valamint a rács-QCD szimulációk jóslata szerinti, az anyagban a plazma - hadrongáz fázisátalakulás környékén megnövekedő kölcsönhatási energia (ld. a [2] - [4]

cikkeket).

A másik lehetséges ok, hogy a vizsgált nagyenergiás ütközésekben lezajló hadronkeltési folyamat olyan, hogy a keltett h_1, \dots, h_N hadronok keltésének hatáskeresztmetszete, $d\sigma^{h_1, \dots, h_N} = |M|^2 \delta^{(4)}(\sum p_{h_i}^\mu - P_{tot}^\mu) d\Omega_{h_1, \dots, h_N}$ jó közelítéssel arányos az energiamegmaradás által megszorított hadron-fázistérfaktorokkal:

$d\sigma^{h_1, \dots, h_N} \propto \delta(\sum \epsilon_{h_i} - E_{tot}) d\Omega_{h_1, \dots, h_N}$, ahol egy keletkező h_i hadron négyesimpulzusa $p_{h_i}^\mu$, energiája ϵ_i , az ütközésbe bemenő teljes négyesimpulzus P_{tot}^μ , $E_{tot} = P_{tot}^0$, a reakció mátrixeleme M , a keletkező N db hadron fázistere pedig Ω_{h_1, \dots, h_N} . Ez utóbbi esetben a keletkező hadronok mikrokanonikus sokaságot alkotnak, annak ellenére, hogy a folyamat, mely keltette őket lehet erősen nem-egyensúlyi. A mikrokanonikus eloszlás pedig a teljes \sqrt{s} ütközési energiához képest alacsony egyedi hadron energiákra - ahol az SPS, RHIC és LHC detektorai mérnek - jól közelíthető a kanonikus eloszlással.

Ákármiylen ok áll azonban a hadronkeltési folyamatok hátterében, a Boltzmann-eloszláson alapuló statisztikus modellek a nehézion és proton-proton ütközésekben mért hadronspektrumokat jobbra csak a $p_T \leq 2$ GeV tartományon reprodukálják. A spektrumok nagyobb energiás részének statisztikus leírásához a Boltzmann statisztika általánosítása szükséges. A Boltzmann statisztika egy lehetséges általánosításából adódó, Tsallis-Pareto eloszlásra épülő statisztikus és termikus modellek az SPS, RHIC és LHC energiás nehézion ütközésekben mért transzverz hadronspektrumokat a $p_T \leq 5-6$ GeV, a proton-proton ütközésekben mért transzverz hadronspektrumokat pedig a teljes mérési tartományokon leírják (ld. a [37], [57] - [65], [67] - [77], valamint a [79]-[82] referenciákat.). Emellett a $\sqrt{s} \in [14 \text{ GeV}, 200 \text{ GeV}]$ ütközési energiás elektron-pozitron annihilációkban keltett töltött hadronok fragmentációs függvényei és a *jetek* irányához viszonyítva transzverz momentum eloszlásai is jól illeszthetők a Tsallis-Pareto családba tartozó általánosított statisztikus modellekkel (ld. a [83] - [85], és a [92] referenciákat).

Az előbbi modellekben használt általánosított statisztikus eloszlások többféle megközelítésben is megkaphatók. A [17] - [31] cikkek a Jaynes féle *maximum entrópia elvből* (ld. a [16] referenciát) szereplő Shannon-féle entrópia formula (ld. a [15] referenciát) általánosítása mellett érvelnek, míg a [38, 40, 53, 76] cikkekben a Jaynes féle *ansatzon* túlmutató kinetikus modellekbe speciális kölcsönhatásokat vezetnek be. A speciális entrópia formulákkal és kölcsönhatásokkal jellemezhető rendszerek termodinamikai egyensúlyának és hőmérsékletének kapcsolatát a [39] cikk foglalja össze. A Tsallis-Pareto eloszlás ezenkívül általánosított Langevin (ld. a [42] - [46] publikációkat) és Boltzmann-egyenletek (ld. a [47] - [49] cikkeket) stacionárius megoldásaként is megkapható. Végül az is lehetséges, hogy az ütközésekben keltett hadronspektrumok Boltzmann vagy mikrokanonikus eloszlásúak, miközben a multiplicitás (az ütközésben keletkező hadronok száma) és a spektrális hőmér-

séklet ütközésről ütközésre fluktuál, és ennek okán a sok millió ütközés hadron hozamának átlagaként kapott spektrum Tsallis-Pareto eloszlást követ (a fluktuáló paraméterekre alapuló, *szuper-statisztikusnak* nevezett modellekről ld. a [32] - [36], valamint a [86] referenciákat).

Az SPS, RHIC és LHC energiákon megmért hadronspektrumok egyaránt az $\epsilon_h \ll \sqrt{s}$, vagyis a statisztikus fizika szemszögéből nézve a kanonikus fizika energiatartományába esnek. Elektron-pozitron annihilációs kísérletekben ellenben a hadronspektrumokat egészen az $\epsilon_h \lesssim \sqrt{s}/2$, vagyis a *jetek*ben keltett hadronok által az ütközésből elvihető maximális energiáig megmérték, így ezek statisztikus fizikai leírásához mikrokanonikus modellek szükségesek, mint ezt a [86] - [92] cikkekben is javasolták.

PhD tanulmányaim alatt többek között két fontos eredményt sikerült publikálnom. Egyrészt az [53] cikkben megmutattam, hogy a proton-proton, nehézion és elektron-pozitron ütközések hadronspektrumainak leírására jól használható Tsallis-Pareto eloszlás levezethető a *nagy eltérések tételének* (ld. [50] - [52]) általánosításából. A kapott módszer lehetővé teszi, hogy speciális rendszerekben meghatározzuk egy részecske energia-eloszlását a részecskék közötti mikroszkópikus kölcsönhatások ismeretében, míg az eddigi módszerek csak egy makroszkópikus hőtartállyal termikus egyensúlyban lévő részrendszer eloszlásának meghatározására irányultak.

Másrészt kidolgoztam egy statisztikus fragmentációs modellt, mely szintén alkalmazható egyensúlytól távoli rendszerekre, és keretei közt jól leírhatók a $\sqrt{s} \in [14 \text{ GeV}, 200 \text{ GeV}]$ ütközési energiás elektron-pozitron ütközésekben mért fragmentációs függvények és hadron multiplicitás-eloszlások (ld. a [92] referenciát). A modell alacsonyenergiás (kanonikus) közelítéséről a [78] cikkben megmutattuk, hogy megfelelő paraméterezés esetén kielégíti a QCD skálafejlődését leíró DGLAP egyenletet (a rövidítést a Gribov és Lipatov [155], Alterelli és Parisi [156], valamint Dokshitzer [157] cikkei után a szerzők nevének kezdőbetűiből képezték), valamint hogy segítségével pQCD alapú parton-modell számolásokban (ld. a [154] referenciát) kvalitatíve hasonló töltött pion spektrumok kaphatók, mint az idodolomban leggyakrabban használt AKK (Albino, Kniehl és Kramer [152] cikke után) fragmentációs függvények használata esetén.

Amennyiben ezen statisztikus modell a jövőben elvégzendő részletesebb kísérleti és elméleti próbatételeket is kiállja, megbizonyosodhatunk arról, hogy a fragmentációval történő hadronizáció folyamata leírható a statisztikus fizika keretein belül. A hadronizáció megértése pedig lehetővé teszi többek között a nehézion ütközésekben keletkező kvark-gloun plazma közvetlen vizsgálatát, melyre eddig csak közvetve volt lehetőség. A modell részletesebb teszteléséhez azonban részletesebb kísérleti adatok szükségesek, ugyanis a jelenleg rendelkezésre álló, elektron-pozitron annihilációs kísérletekben megmért hadronspektrumok sokmillió esemény átlagából készített statisztikák, ily módon az ütközésről-ütközésre történő

fluktuációk és az erős kölcsönhatás okozta *jet*en belüli korrelációk és kölcsönhatások spektrumokra gyakorolt hatása nem választható szét. A modell pontosabb teszteléséhez tehát szükséges a *jet*ekben lévő hadroneloszlások megmérése különböző, fix multiplicitású *jet*ek esetében, annak érdekében, hogy az eseményről-eseményre történő multiplicitás-fluktuációk hatását leválaszthassuk a hadronizáció folyamatát meghatározó egyéb effektusokról.

1.2. Az értekezés felépítése

Az 1.3. részben egy egyszerű rendszer példáján ismertetem a nem-extenzivitás fogalmát, ilyen rendszerek néhány karakterisztikus tulajdonságát, valamint összefoglalom az általam kidolgozott statisztikus modellek témakörébe tartozó főbb kortárs kutatási eredményeket.

Az ezután következő 2 - 5. fejezetekben főként saját eredményeket mutatok be. A 2. fejezetben megmutatom, hogyan lehet speciális, nem-extenzív részecskerendszerekben meghatározni az egyrészecske energia-eloszlást a részecskék közötti mikroszkópikus kölcsönhatások ismeretében.

A 3. fejezetben megmutatom, hogy az előző fejezetekben levezetett nem-extenzív eloszlások egy része extenzív rendszerek esetében is tapasztalható, amennyiben a vizsgált rendszer egyes paraméterei fluktuálnak, viszont mérni csak a fluktuációkra átlagolt eloszlásokat tudom. Példa ilyen helyzetre egy lokálisan egyensúlyban lévő rendszer, aminek a hőmérséklete helyről-helyre változik, viszont a rendszer jellemző paramétereit lokálisan nem, csak globálisan tudom mérni. Egy másik példa az elektron-pozitron ütközésekben keltett egyensúlytól távoli hadronzáporok, melyek hadron-száma eseményről-eseményre fluktuál, mérni ellenben csak az átlagspektrumokat mérjük.

A 4. fejezetben nem-extenzív, illetve szuper-statisztikus hadronizációs modelleket mutatok be, egyensúlyi és nem-egyensúlyi rendszerek esetében.

Az 5. fejezetben a 2 - 4. fejezetekben ismertetett modellek egy részét kísérleti bizonyítékokkal támasztom alá.

A 6. fejezetben összefoglalom az értekezés eredményeit, és felvetek néhány, a kutatási folyamat logikájából fakadó, de mindeztáig megválaszolatlan kérdést.

1.3. Nem-extenzív rendszerek egyensúlyban

Nem-extenzívnek nevezzük olyan rendszereket, melyek egyes, szokványos rendszerekben extenzív mennyiségei, mint például az összenergia vagy összentrópia, a termodinamikai limitben sem arányosak a rendszer részecskéinek N számával. Ebben a fejezetben ilyen rendszerre mutatok példát, és összefoglalom a rendszer egyensúlyi eloszlásának meghatározására az irodalomban használatos módszereket.

Nem-additív energia kompozíciók

Tekintsünk példaként egy olyan rendszert, melynek E összenergiája és részecskéinek ϵ_i energiái közt az

$$\begin{aligned} E &= \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_N \\ &+ a (\epsilon_1 \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_{N-1} \epsilon_N) \\ &\vdots \\ &+ a^{N-1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_N. \end{aligned} \tag{1.1}$$

összefüggés áll fenn. Ez a fenti formula egy ún. *formális logaritmus*,

$$L(\epsilon) = \frac{1}{a} \ln(1 + a \epsilon). \tag{1.2}$$

segítségével egyszerű összeadásba vihető (ld. [40]):

$$L(E) = \sum_i L(\epsilon_i). \tag{1.3}$$

Ha megbecsüljük a rendszer összenergiáját, az egyrészecske energiák helyébe egy átlagos $\bar{\epsilon}$ értéket írva,

$$E \approx L^{-1}[N L(\bar{\epsilon})] = \frac{1}{a} \left[(1 + a\bar{\epsilon})^N - 1 \right], \tag{1.4}$$

amiből látszik, hogy az összenergia nem arányos a részecskeszámmal,

$$E \not\propto N, \tag{1.5}$$

hanem azzal exponenciálisan nő, ugyan az $a \rightarrow 0$ limitet az $N \rightarrow \infty$ határátmenet előtt véve $E = N\bar{\epsilon}$ adódik.

Környezetével energiát cserélő rendszerek egyensúlyi eloszlását kétféle alapelemből szokták származtatni. Az egyik az *egyenlő valószínűségek elve*, a másik a *Jaynes elv*.

Az a priori *egyenlő valószínűségek elve*

Az elv alkalmazását a kanonikus eloszlás levezetésén mutatom be. Az egyenlő valószínűségek elve feltételezi, hogy egy *nagy, izolált rendszer az azonos E összenergiájú állapotaiban egyenlő valószínűséggel tartózkodhat* (elegendő idő eltelte után, és feltéve, hogy a rendszer ergodikus). Ez a valószínűség

$$\mathcal{P}(\mu) = \frac{1}{\Omega}, \quad (1.6)$$

az adott E energiás fázistérfelület,

$$\Omega(E) = \int d\mu \delta[\mathcal{H}(\mu) - E] \quad (1.7)$$

mellett, ahol \mathcal{H} a rendszer energiája, az állapotterén pedig μ fut végig. Ha egy r rendszer a vele termikus kapcsolatban álló R hőtartály méreteihez képest elhanyagolható, és a hőtartályra igaz az egyenlő valószínűségek elve, így az (1.6) képlet, az r rendszer eloszlása, vagyis annak valószínűsége, hogy r energiája ϵ , míg $R \cup r$ energiája E ,

$$f(\epsilon) = \mathcal{P}(E_r = \epsilon \mid E_R = E^*) = \frac{\Omega_R(E^*)}{\Omega_{R \cup r}(E)}. \quad (1.8)$$

Ha R és r nem hat kölcsön, $E^* = E - \epsilon$, ha azonban R és r között az (1.1) kölcsönhatás van jelen, $L(E^*) = L(E) - L(\epsilon)$, amiből a kanonikus ($E \gg \epsilon$) limeszben

$$\ln f(\epsilon) = \text{konst.} + \ln \Omega_R[L(E) - L(\epsilon)] \approx \text{konst} - \frac{\Omega'_R[L(E)]}{\Omega_R[L(E)]} L(\epsilon). \quad (1.9)$$

Az egyenlő valószínűségek elvét lehet a *maximum entrópia elvvel* is indokolni: nagy, izolált, ergodikus rendszer entrópiája (elegendő idő eltelte után) maximális. Megegyező eredményre vezet az információelméleti megfogalmazás, mely szerint egy kaotikus, elszigetelt rendszer eloszlása minimális információt rejt. Mindkét megfogalmazásban a Shannon-Neumann-Gibbs féle entrópiát maximalizálja a rendszer eloszlása, \mathcal{P} :

$$S_{SN}[\mathcal{P}] = - \int d\mu \mathcal{P}(\mu) \ln \mathcal{P}(\mu) \delta[\mathcal{H}(\mu) - E] = \max. \quad (1.10)$$

A variációs feladat megoldása az (1.6) egyenletes eloszlás az E energiás fázistér felületen, vagyis az egyenlő valószínűségek elve. Az entrópia egyensúlyi értéke pedig

$$S_{SN}[\mathcal{P}_{eq}] = \ln \Omega(E) . \quad (1.11)$$

Két ergodikus, statisztikusan független és az (1.3) szerint kölcsönható rendszer termikus egyensúlyának feltétele,

$$\begin{aligned} S &= S_1(E_1) + S_2(E_2) = \max , \\ L(E) &= L(E_1) + L(E_2) = \text{konst} , \end{aligned} \quad (1.12)$$

meghatározza a termodinamikai hőmérsékletet, hiszen az (1.12) egyenletből a két rendszer változóinak szeparálása után

$$\frac{\frac{\partial S_1}{\partial E_1}}{\frac{\partial L(E_1)}{\partial E_1}} = \frac{1}{T} = \frac{\frac{\partial S_2}{\partial E_2}}{\frac{\partial L(E_2)}{\partial E_2}} \quad (1.13)$$

adódik (ld. [39]). Mindezekből az (1.9) képletben szereplő Ω'/Ω a (1.11) és (1.13) képletek felhasználásával megfeleltethető a hőtartály inverz hőmérsékletének,

$$\frac{\Omega'_R[L(E)]}{\Omega_R[L(E)]} = \left(\ln \Omega_R[L(E)] \right)' = \frac{\partial S_R}{\partial L} = \beta_R , \quad (1.14)$$

és így az (1.9) képletből az r alrendszer energia-eloszlása

$$f(\epsilon) = A \exp\{-\beta_R L(\epsilon)\} . \quad (1.15)$$

A kapott eredmény bármilyen, a környezetétől statisztikusan független, de azzal valamilyen $L(E)$ formális logaritmuson keresztül energetikailag kölcsönható rendszer esetére fennáll.

A Jaynes(maximális entrópia)-elv

Egy környezetével energiát cserélő r rendszer egyensúlyi eloszlásának meghatározására szolgáló variációs elvet *Jaynes elvnek*, vagy *Max Ent elvnek* is szokás nevezni. A Jaynes elv egy becslési módszer, mely úgy becsüli meg az ismeretlen $f(\mu_r)$ eloszlást, amelynek csak egy ismert $c(\mu_r)$ függvénnyel vett integrálját,

$$C[f] = \int d\mu_r f(\mu_r) c(\mu_r) = k , \quad (1.16)$$

ismerjük, hogy felteszi, hogy az $f(\mu_r)$ eloszlás az (1.16)-ot leszámítva a lehető legkevesebb információt tartalmazza. Az $f(\mu_r)$ -ből kinyerhető információt a módszer valamilyen információs mérték, pl. a Shannon-Neumann féle entrópia segítségével számszerűsíti. Ezekből az $f(\mu_r)$ eloszlást a

$$\beta \Phi[f] = -S[f] + \beta C[f] = \min \quad (1.17)$$

variációs feladat megoldása adja (ld. [16]). Az $S[f]$ és $C[f]$ funkcionálokat a leírni kívánt rendszer tulajdonságainak megfelelően kell megválasztani.

A Jaynes(Max Ent)-elv és az egyenlő valószínűségek elv kapcsolata

Az egyenlő valószínűségek elve szerint egy egyensúlyi rendszer minden ekvi-energetikus állapotában egyenlő valószínűséggel lehet. Ez a valószínűség a rendszer ekvi-energetikus állapotainak számával fordítottan arányos: $p(E) = 1/\Omega(E)$. A rendszer Shanon-Neumann-Gibbs entrópiája így $S^{eq} = \ln \Omega(E)$. Ha ez a rendszer egy r kisebb rendszerből és egy sokkal nagyobb R hőtartályból áll, melyek szintén termikus egyensúlyban vannak, és statisztikus függetlenségük miatt állapotaik számának szorzata adja az $r + R$ rendszer állapotainak számát, azaz $\Omega_{r+R} = \Omega_r \Omega_R$, akkor az összentrópa

$$S_{r+R}^{eq}(E) = S_r^{eq}(\epsilon) + S_R^{eq}(E - \epsilon) = \ln \Omega_r(\epsilon) + \ln \Omega_R(E - \epsilon) . \quad (1.18)$$

Az r kisebb rendszer ϵ energiás állapotainak $\Omega_r(\epsilon)$ számát és az ehhez az energiához tartozó eloszlásfüggvény $f(\epsilon)$ értékét az (1.8) egyenlet alapján az $f(\epsilon) = 1/\Omega_r(\epsilon)$ köti össze. Fontos, hogy $S_{r+R}^{eq}(E)$ független ϵ -től, és ezért

$$S_{r+R}^{eq}(E) = \int d\mu_r f(\epsilon) S_{r+R}^{eq}(E) = \int d\mu_r f(\epsilon) \left[-\ln f(\epsilon) + S_R^{eq}(E - \epsilon) \right] , \quad (1.19)$$

feltéve, hogy $\int d\mu_1 f(\epsilon) = 1$ (μ_r az r rendszer fázistere.). Ezt a feltételt egy α Lagrange multiplikátorral hozzáadva az $S_{r+R}^{eq}(E)$ -hez, és kihasználva a kanonikus limeszt, vagyis hogy az $E \gg \epsilon$ miatt $S_R^{eq}(E - \epsilon) \approx S_R^{eq}(E) - \epsilon S_R^{eq'}(E) = konstans - \epsilon \beta$, az

$$-\int d\mu_r f(\epsilon) \ln f(\epsilon) - \beta \int d\mu_r \epsilon f(\epsilon) + \alpha \int d\mu_r f(\epsilon) = \max \quad (1.20)$$

variációs feladatot kapjuk. Ez az érvelés megindokolja az (1.17) egyenletben szereplő $S[f]$ és $C[f]$ alakját. Az (1.20) megoldása természetesen a normált Boltzmann-Gibbs eloszlás.

$$f(\epsilon) = A \exp\{-\beta \epsilon\} . \quad (1.21)$$

Ha azonban az r és R rendszerek valamilyen formális logaritmuson keresztül kölcsönhatnak, mint pl. az (1.1) esetben, az R hőtartály energiáját az

$$L(E_R) = L(E) - L(\epsilon) \quad (1.22)$$

egyenlet adja, és így az (1.19) egyenletben $S_R^{eq}[L(E) - L(\epsilon)]$ szerepel. A kanonikus limeszt ez esetben is kihasználhatjuk,

$$S_R^{eq}[L(E) - L(\epsilon)] \approx S_R^{eq}[L(E)] - L(\epsilon) \frac{\partial S_R^{eq}[L(E)]}{\partial L(E)} , \quad (1.23)$$

és az egyensúly (1.13) feltételéből az r rendszer eloszlására kapható variációs feladat a

$$- \int d\mu_r f(\epsilon) \ln f(\epsilon) - \beta \int d\mu_r L(\epsilon) f(\epsilon) + \alpha \int d\mu_r f(\epsilon) = \max \quad (1.24)$$

alakú lesz. A megoldás a normált (1.15) eloszlás.

Egyes korrelált rendszerek esetében, speciális korrelációk miatt r és R ekvi-energetikus állapotai számának szorzata nem egyenlő az $r + R$ rendszer állapotainak számával, hanem az

$$\ln_q \frac{1}{\Omega_{r+R}(E)} = \ln_q \frac{1}{\Omega_r(\epsilon)} + \ln_q \frac{1}{\Omega_R(E - \epsilon)} \quad (1.25)$$

egyenlet teljesül. A bevezetett deformált logaritmus és exponenciális függvények

$$\begin{aligned} \ln_q(z) &= \frac{z^{1-q} - 1}{q - 1} \\ \exp_q(z) &= [1 + (q - 1)z]^{-1/(q-1)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

egymás inverzei (ld. [24]). Az (1.25) egyenlet bal oldala ez esetben sem függ ϵ -től, és az r rendszer ϵ energiájú állapotához tartozó $f(\epsilon)$ eloszlásfüggvény értékre ebben az esetben is fennáll az $f(\epsilon) = 1/\Omega_r(\epsilon)$ összefüggés, ezért az (1.25) egyenlet átírható az

$$\ln_q \frac{1}{\Omega_{r+R}(E)} = \int d\mu_r f(\epsilon) \left[\ln_q f(\epsilon) + \ln_q \frac{1}{\Omega_R(E - \epsilon)} \right] \quad (1.27)$$

alakba. Abban az esetben, ha meg akarjuk tartani az entrópia additivitását, az (1.25) egyenletből az egyensúlyi entrópiára az

$$S^{eq}(E) = \ln_q \frac{1}{\Omega(E)} \quad (1.28)$$

definíció tűnik kézenfekvőnek, hiszen ezáltal az

$$S_{r+R}^{eq}(E) = S_r^{eq}(\epsilon) + S_R^{eq}(E - \epsilon) \quad (1.29)$$

automatikusan következik. Ekkor az (1.27) egyenlet az

$$S_{r+R}^{eq}(E) = \int d\mu_r f(\epsilon) \left[\ln_q f(\epsilon) + S_R^{eq}(E - \epsilon) \right] \quad (1.30)$$

alakúvá válik. Amennyiben meg akarjuk tartani a termodinamikai egyensúly feltételének az (1.12) egyenletbeli alakját (most az $L(E) = E$ speciális esetben), $S_R^{eq}(E - \epsilon)$ -et az előzőekben leírt módon közelítve kapjuk a hőtartállyal korrelált r rendszer eloszlására az

$$\int d\mu_r f(\epsilon) \ln_q f(\epsilon) - \beta \int d\mu_r \epsilon f(\epsilon) + \alpha \int d\mu_r f(\epsilon) = \max \quad (1.31)$$

variációs problémát. Az egyensúlyi eloszlás ismét (1.15), a formális logaritmusra az (1.2) és $a = (q - 1)/T$ választással.

Ha az R hőtartály és az r kisebb rendszer között az (1.3) alakú kölcsönhatások is fellépnek, az (1.22) és (1.23) megfontolásokból következően végül az

$$\int d\mu_r f(\epsilon) \ln_q f(\epsilon) - \beta \int d\mu_r L(\epsilon) f(\epsilon) + \alpha \int d\mu_r f(\epsilon) = \max \quad (1.32)$$

variációs feladat megoldásaként kaphatjuk az r rendszer egyensúlyi kanonikus eloszlását,

$$f(\epsilon) = \frac{A}{\left[1 + (q - 1)\beta L(\epsilon) \right]^{1/(q-1)}} \quad (1.33)$$

tetszőleges $L(\epsilon)$ formális logaritmussal (ld. [39]).

Az (1.17) egyenlet, vagyis a Jaynes elv nyelvére lefordítva az (1.20), (1.24), (1.31) és (1.33) egyenleteket az $S[f]$ és $C[f]$ funkcionálokra, valamint az $f_{eq}(\epsilon)$ egyensúlyi, kanonikus eloszlásra kapható eredményeket a következő táblázat foglalja össze.

$S[f]$	$C[f]$	$f_{eq}(\epsilon)$
$-\int f \ln f$	$\int \epsilon f$	$A \exp\{-\beta \epsilon\}$
$-\int f \ln f$	$\int L(\epsilon) f$	$A \exp\{-\beta L(\epsilon)\}$
$\int f \ln_q f$	$\int \epsilon f$	$A \left[1 + (q-1)\beta \epsilon\right]^{-1/(q-1)}$
$\int f \ln_q f$	$\int L(\epsilon) f$	$A \left[1 + (q-1)\beta L(\epsilon)\right]^{-1/(q-1)}$

(1.34)

Az integrálás minden esetben az r rendszer μ_r fázisrére történik, $f = f(\epsilon)$, \ln_q -t az (1.26) képlet definiálja, $L(\epsilon)$ pedig tetszőleges szigorúan monoton, $L(0) = 0$ kezdeti feltételnek eleget tevő függvény. Az A amplitúdó az $f_{eq}(\epsilon)$ normáltságát állítja be, végül $\epsilon(\mu_r)$ az r rendszer energiája a μ_r állapotban.

A következő két fejezetben olyan módszert mutatok be, amely nem csak egy makroszkópikus R hőtartály és egy annál sokkal kisebb r alrendszer egyensúlyára alkalmazható, hanem speciálisan kölcsönható részecskék izolált rendszerében is megadja az egyrészecske eloszlást.

2. fejezet

Egyrészecske eloszlás nem-extenzív rendszerekben

Az előző fejezetben vázolt, a kortárs irodalomban megtalálható módszerek egy makroszkópikus hőtartály és egy vele egyensúlyban lévő, alrendszer kölcsönhatásából és korrelációjából határozzák meg a vizsgálni kívánt alrendszer energia-eloszlását. Ebben a fejezetben egy termikusan izolált részecskerendszerben határozom meg az egyrészecske eloszlást abban az esetben, ha a részecskék közötti mikroszkópikus kölcsönhatások az (1.3) alakú energia összefüggésre vezetnek.

Az ebben a fejezetben bemutatott eredmények az [53, 93] cikkekben lettek közzéve.

2.1. Kanonikus eloszlás, *nagy eltérések tétele*

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszerre igaz az egyenlő valószínűségek elve, vagyis hogy a rendszer minden azonos összen energiájú állapotában azonos valószínűséggel lehet. Tegyük fel továbbá, hogy az összenenergia rögzítettségén kívül semmilyen más megszorítás nem vonatkozik a rendszerre. Ezesetben az egyrészecske eloszlás, vagyis annak valószínűsége, hogy az egyik részecske ϵ energiával bír, míg a maradék $N - 1$ részecske a maradék energián osztozik,

$$\frac{d\mathcal{P}_N}{dF(\vec{p})} = \frac{\Omega_{N-1}(E')}{\Omega_N(E)}, \quad (2.1)$$

ahol $F(\vec{p})$ a részecske fázistér eloszlása (pl.: homogén, izotróp rendszer esetén $dF(\vec{p}_i) \propto d^3\vec{p}_i$). A Boltzmann-Gibbs statisztika általánosításához a részecskék között megengedünk olyan kölcsönhatásokat, melyek szerint az összenenergia, E és a részecskék ϵ_i energiái között valamilyen szigorúan monoton függvény, $L(x)$ teremt kapcsolatot a következő módon:

$$\sum_j L(\epsilon_j) = L(E). \quad (2.2)$$

Ebból következően a (2.1) képletben szereplő E' -re, a maradék $N - 1$ részecske energiájára az $L(E') + L(\epsilon) = L(E)$ képlet áll fenn az egyszerű összeadás helyett. Ilymódon az adott energiára megszorított fázistér fogat

$$\Omega_N(E) = \int \prod_i dF(\vec{p}_i) \delta \left(\sum_j L(\epsilon_j) - L(E) \right). \quad (2.3)$$

Felhasználva a $2\pi \delta(x) = \int ds \exp(i s x)$ összefüggést az előző képlet faktorizálódik egyrészecske fázistér integrálokra:

$$\Omega_N(E) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{isL(E)} \prod_i \int dF(\vec{p}_i) e^{-isL(\epsilon_i)}. \quad (2.4)$$

A termodinamikai limeszben, ahol a részecskék száma, $N \rightarrow \infty$, és az egyrészecske energiák sokkal kisebbek az összenégiánál, $\epsilon_i \ll E$, az egyes fázistér integrálok függetlenné válnak, és egyszerűen összeszorzódnak, vagyis

$$\Omega_N(E) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp \{ i s L(E) \} \varphi^N(s), \quad (2.5)$$

a $\varphi(s) = \int dF(\vec{p}_i) e^{-isL(\epsilon_i)}$ bevezetésével. A $\varphi^N(s)$ faktort is exponencializálva ($\hat{I} = \ln \varphi$) a fázistér fogat

$$\Omega_N(E) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp \left\{ -N \left(-i s \frac{L(E)}{N} - \hat{I}(s) \right) \right\} \quad (2.6)$$

kifejezésében szereplő s szerinti integrált a nagy N limeszben a legnagyobb járulékot adó

$$\Omega_N(E) \approx \exp \{ -N \mathcal{F}[s^*] \} \quad (2.7)$$

értékkel közelíthetjük. A megjelenő

$$\mathcal{F}[s^*] = -i s^* \frac{L(E)}{N} - \hat{I}(s^*), \quad (2.8)$$

egy részecskére eső szabadenergiára emlékeztető kifejezést minimalizáló s^* az inverz hőmérséklettel áll kapcsolatban, ugyanis \mathcal{F} minimumában

$$\frac{L(E)}{N} = \frac{\int dF(\vec{p}) L(\epsilon) \exp[-\beta L(\epsilon)]}{\int dF(\vec{p}) \exp[-\beta L(\epsilon)]}. \quad (2.9)$$

bevezetve a $\beta = i s^*$ inverz hőmérsékletet. Az $\Omega_N(E)$ fázistérfogatra a (2.7 - 2.9) egyenletekben kapott becslést adja a **Nagy eltérések tétele** [51, 52] az $L(x) = x$ esetben. Fontos észben tartani, hogy s^* igazából $L(E)/N$ függvénye. Ezek után a (2.1) és (2.7) képletek alapján az egyrészecske eloszlásra a

$$\frac{d\mathcal{P}_N}{dF(\vec{p})} \approx \exp \left\{ -(N-1) \mathcal{F} \left[\frac{L(E')}{N-1} \right] + N \mathcal{F} \left[\frac{L(E)}{N} \right] \right\} \quad (2.10)$$

összefüggés adódik. Kihasználva, hogy a termodinamikai limeszben $N \rightarrow \infty$ és $E \gg \epsilon$, valamint $L(x)$ szigorúan monoton függvény, a (2.10) képlet exponensének első tagját elegendő a Taylor-sorban lineáris rendig kifejtetni $L(E)/N$ körül. Mivel \mathcal{F} első deriváltja

$$\mathcal{F}' \left[\frac{L(E)}{N} \right] = -i s^* + \left(-i \frac{L(E)}{N} - \hat{I}'(s^*) \right) s^{**} = -\beta, \quad (2.11)$$

hiszen a zárójelben lévő tag zérus a (2.9) minimum feltétel miatt, az egyrészecske eloszlás

$$\frac{d\mathcal{P}_N}{dF(\vec{p})} \approx \frac{\exp\{-\beta L(\epsilon)\}}{\int dF(\vec{p}) \exp\{-\beta L(\epsilon)\}}. \quad (2.12)$$

A végeredmény tehát exponenciális, viszont nem a részecske energiájában, hanem annak L formális logaritmusában. Így végül megkaptuk az (1.24) variációs feladat megoldását, mely az $L = (1/a) \ln(1 + a\epsilon)$, és $a = (q-1)/T$ választás esetében egyben az (1.31) variációs probléma megoldása is. A különbség az, hogy jelen esetben az eloszlásban szereplő β paraméter a (2.9) képlet alapján egy részecskére eső átlagos energiát jelent, nem az (1.12) termodinamikai egyensúlyból következő (1.13) mennyiséget.

Fontos megjegyezni, hogy a fenti gondolatmenet nem igényli, hogy a részecskék egyensúlyi rendszer elemei legyenek. Csupán az szükséges, hogy eloszlásukra az egyedüli megszorítás a rögzített összenergiájuk legyen. Ezért alkalmazható a levezetés nem termikus részecskékre, mint pl. *jet*-ek hadronjaira (ld. 4.3. és 5.3. rész).

2.2. Mikrokanonikus eloszlás

Azon spektrumok esetében, melyeknél a hadronhozamot a teljes reakcióenergiával összemérhető hadronenergiáig megmérték, figyelembe kell venni a véges összenergiát: mikrokanonikusan kell számolni. Ez azt jelenti, hogy a (2.6) egyenletben nem lehet az s szerinti integrált a legvalószínűbb értékkel helyettesíteni, az (1.14), (1.19), (1.23) és (1.30) egyenle-

tekben pedig a hőtartály entópiájának energia szerinti deriváltja nem egyenlő egy energiafüggetlen β_R konstanssal. Ebben a fejezetben a (2.2) típusú kölcsönhatásokkal jellemezhető, valamint az *egyenlő valószínűségek* elvének eleget tevő rendszerek egyrészecske-eloszlását számolom ki mikrokanonikusan, vagyis a termodinamikai limesz közelítés nélkül.

Az egyrészecske eloszlást mikrokanonikus számolás esetében is az (2.1) képlet definiálja. Az N részecskés, adott E energiára megszorított fázistér fogat, $\Omega_N(E)$ szintén a (2.3) formulával számolandó, viszont kiszámolásakor az egyes részecskék fázistér integráljainak határaival nem tarthatunk végtelenhez. Ennek okán hiába térünk át Fourier térbe az energiahéj feltételt átírva a $2\pi\delta(x) = \int ds \exp(isx)$ segítségével, az egyes részecskék fázistérintegráljai nem faktorizálódhatnak, csatoltak maradnak. Homogén, izotróp rendszer esetén zérus tömegű, relativisztikus részecskékre

$$\begin{aligned} \Omega_N(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp\{isL(E)\} \times \\ &\times \kappa_D^N \int_0^{p_1^{max}} dp_1 p_1^{D-1} \exp[-isL(\epsilon_1)] \dots \int_0^{p_N^{max}} dp_N p_N^{D-1} \exp[-isL(\epsilon_N)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Az integrálási határok összecsatolják a fázistér integrálokat:

$$\begin{aligned} p_1^{max} &= E \\ L(p_1^{max}) + L(p_2^{max}) &= L(E) \\ &\vdots \\ \sum_1^N L(p_i^{max}) &= L(E). \end{aligned} \quad (2.14)$$

A számolások az appendixben találhatók, a végeredmény $D = 1, 2$ és 3 dimenzióban

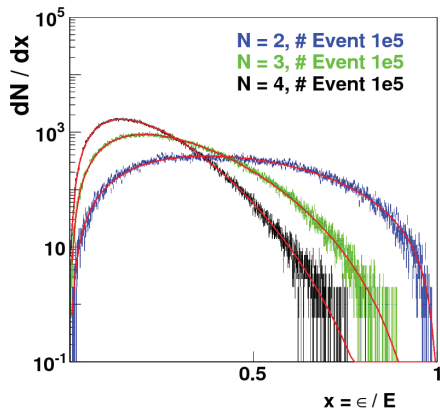
$$\begin{aligned}
D &= 1, \Omega_N(L) \propto L^{N-1} e^{aL}; \\
D &= 2, \Omega_N(L) \propto \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(2N-j-2)!}{j!(N-j-1)!} (-)^N [aL]^j \{e^{aL} + (-)^{j+1} e^{2aL}\}; \\
D &= 3, \Omega_N(L) \propto \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-j-1} \frac{(N+k-1)!}{j!k!} \frac{(2N-j-k-2)!}{(N-j-k-1)!} (-)^{N-j-1} \times \\
&\quad \times [aL]^j \left\{ \frac{(-)^{N-j-1}}{2^{2N-j-k-1}} e^{aL} + (-)^{j+k+1} e^{2aL} + \frac{e^{3aL}}{2^{N+k}} \right\}; \tag{2.15}
\end{aligned}$$

az argumentumban szereplő L alatt $L(E)$ értendő. A (2.2) osztályba tartozó (1.1) kölcsönhatások konkrét esetében például érdekes módon a fázistér fogat, vagyis az adott összenergiához tartozó állapotok száma, ha $a > 0$, aszimptotikusan sokkal lassabban nő az összenergiával, mint a nem kölcsönható részecskék esetén:

$$\Omega_N(E \rightarrow \infty) \propto E^D \ln^{N-1}(aE) \ll \Omega_N^{non}(E) \propto E^{DN-1}. \tag{2.16}$$

Azt is érdemes észrevenni, hogy a Boltzmann entrópia, $S_{BG} \propto \ln \Omega_N$ a nagy N limeszben extenzív, vagyis $S_{BG} \propto N$, éppúgy, mint a nemkölcsönható elméletben. Ellenben a Tsallis és Pareto által javasolt $S_{Ts} \sim \ln_q \Omega_N(E)$ már nem arányos a részecskeszámmal, vagyis nem extenzív mennyiség.

A 2.1. ábra $D = 3$ dimenziós numerikus szimulációk és a (2.15) és (2.1) képletekből kapott analitikus számolások eredményeit mutatja.



2.1. ábra. Egyrészecske eloszlások az $E_{12} = E_1 + E_2 + aE_1E_2$ szerint kölcsönható, $N = 2, 3$, és 4 részecskes rendszerek esetében, $D = 3$ dimenzióban, $a = 1$ mellett. A görbék a (2.1) és (2.15) képletek alapján számolt analitikus, a hisztogrammok szimulációs eredmények. A hisztogrammok a megfelelő statisztika érdekében 10^5 db esemény összegéből készültek. Az ábra a [93] cikkben jelent meg.

3. fejezet

Szuperstatisztikai megközelítés¹

A nagyenergiás ütközésekben keltett hadronok spektrumait lehet egy szintén statisztikus, de az eddig bemutatott modellektől eltérő, nem a részecskék közötti speciális kölcsönhatásokra vagy korrelációkra alapozott módon származtatni. Az ebben a fejezetben bemutatott ún. szuper-statisztikus megközelítés szintén feltételezi, hogy az ütközésekben keltett hadronokra fennáll az *egyenlő valószínűségek elve*, viszont a spektrumokat bizonyos mennyiségek ütközésről-ütközésre (a szokásos elnevezés szerint eseményről-eseményre) történő fluktuációja alakítja.

Az ebben a fejezetben bemutatott eredmények részben a [92] - [94] cikkben lettek közzéadva.

3.1. Multiplicitás fluktuációk, KNO skálázás²

Elektron-pozitron, proton-proton és atommag-atommag ütközésekben egyaránt, a keletkező töltött hadronok N_{ch} száma jó közelítéssel a negatív binomiális eloszlás szerint fluktuál,

$$p(N_{ch}) = \binom{N_{ch} + r - 1}{N_{ch}} q^{N_{ch}} (1 - q)^r, \quad (3.1)$$

valamilyen r illesztési paraméter és q átlagos hadronkeltési valószínűség mellett. A (3.1) multiplicitás-eloszlást szokás a folytonos Euler-Gamma eloszlással is közelíteni,

$$p(N_{ch}) \approx \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (N_{ch} - N_0)^{\alpha-1} e^{-\beta(N_{ch} - N_0)}, \quad (3.2)$$

ahol N_0 a keletkező hadronok minimális számának átlagos értéke. A (3.2) eloszlás a

¹A *szuper-statisztika* kifejezést C. Beck és D. E. G. Cohen vezették be (ld. [32]).

²Koba-Nielsen-Olesen [101] cikke után.

$$p_{KNO}(N) = \frac{1}{\langle N \rangle} \Psi \left(\frac{N - N_0}{\langle N \rangle} \right) \quad (3.3)$$

alakú eloszlások családjába tartozik (ld. [99] cikk), mely alakot a részecskefizikában Poljakov (ld. [100] cikk) javasolt először a multiplicitás-eloszlásra. A (3.3). formulát Koba, Nielsen és Olesen [101] cikke óta a részecskefizikában KNO skálázásnak nevezik.

A [148] cikkből kiderül, hogy a (3.1) formula jól leírja a RHIC energiákon mért hadron multiplicitás-eloszlásokat, az 5.3. részben és a [92] cikkben pedig megmutatom, hogy a (3.2) képlet jó közelítés az elektron-pozitron ütközésekben keltett hadronok számának eloszlásaira. Megjegyzendő azonban, hogy a [104] cikk szerint elektron-pozitron annihilációk esetében a (3.3) képletben szereplő KNO skálázás nagy ütközési energiákon enyhén sérül a *jet*ekben lejátszódó gluon és kvark sugárzást (ún. *splitting*-et) MLLA (*Modified Leading Log Approximation*) közelítésben számolva. A [102, 103] cikkek szerint a KNO skálázás azonban helyreáll, ha a (3.2) képletet az N multiplicitás helyett a $\xi = \ln(DN)$ változóra írjuk fel:

$$p_{\log KNO}(z) = \mathcal{N} z^{\mu k - 1} e^{-(Dz)^\mu} . \quad (3.4)$$

Ahol $z = N/\langle N \rangle$, D , μ , \mathcal{N} és k pedig a \sqrt{s} ütközési energiával változik. A skálásértést okozó μ értéke $\mu \approx 1$, így a (3.2) képlet valóban közelítőleg alkalmazható.

3.2. Kanonikus eloszlás

Ha egy eseményben (ütközésben) keletkező hadronokra teljesül az *egyenlő valószínűségek elve*, akkor egyetlen hadron energia szerinti eloszlása mikrokanonikus. Ha emellett a keletkező hadronok száma ütközésről-ütközésre a (3.2) alakú eloszlás szerint fluktuál, akkor a kísérletekben mért átlag hadronspektrum az (1.33) egyensúlyi eloszláshoz hasonló eloszlású lesz. A kapott eloszlás nagy multiplicitás vagy a \sqrt{s} összen energiához képest kis hadronenergia esetén igen jól közelíthető a Tsallis-Pareto eloszlással.

Tegyük fel tehát, hogy egy eseményben a hadronok eloszlása Boltzmann-Gibbs:

$$f_N(\epsilon) = A_c e^{-\beta_N \epsilon} , \quad (3.5)$$

melyben $A_c = \beta_N^D / (k_D \Gamma(D))$ és $k_D = \int d\Omega_p$ a momentumtér szög szerinti integrálja az alábbi normálási feltételekből,

$$\begin{aligned}
1 &= \int d\Omega_p \int dp p^{D-1} f_N(\epsilon), \\
\frac{E}{N} &= \int d\Omega_p \int dp p^{D-1} \epsilon f_N(\epsilon)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

következnek. A inverz hőmérséklet $\beta_N = 1/T_N$ az egy részecskére eső átlagenergiát jelenti

$$\frac{E}{N} = D T_N, \tag{3.7}$$

D dimenzióban, vagyis $\beta_N \propto N$. Következésképpen a multiplicitás-fluktuációk hőmérséklet fluktuációkat generálnak. A mért spektrumok sok millió esemény hadronhozamának átlagából készített statisztikák, vagyis a mért átlag spektrum a

$$p(N) = A_m N^{\alpha-1} e^{-\beta N}, \tag{3.8}$$

multiplicitás-eloszlást használva ((3.3 képlet $N_0 = 0$ -val és A_m, α, β illesztési paraméterekkel) közelítőleg a Tsallis-Pareto eloszlás:

$$\frac{d\sigma}{d^D p} = \sum p(N) N f_N(\epsilon) \approx \frac{\kappa_{D,E}}{\left(1 + \frac{D}{\beta} x\right)^{\alpha+D+1}}. \tag{3.9}$$

A diszkrét szummát folytonos integrállal közelítettem, $x = \epsilon/E$, a keltett hadron energiája az egy hadron által elvihető maximális E energiával skálázva, és

$$\kappa_{D,E} = A_m D^D \beta^{\alpha+D+1} / (E^D k_D \Gamma(D)).$$

A (3.7) és (3.8) képletekből következik, hogy az inverz hőmérséklet is Gamma eloszlás szerint fluktuál. Azt a tényt, hogy az ilyen hőmérséklet fluktuáció a Boltzmann-eloszlást Tsallis-Pareto-vá alakítja, már a [77, 84] cikkekben is közölték.

3.3. Mikrokanonikus eloszlás

Amennyiben az egy eseményben keletkező hadronok eloszlását mikrokanonikusnak vehetjük,

$$f_N(\epsilon) = A_{mc} (1-x)^{D(N-1)-1}, \tag{3.10}$$

(a számolást a 7.0.1 rész tartalmazza), az $A_{mc} = \binom{D N-1}{D(N-1)-1} D / (k_D E^D)$ normálási faktoral, mely a

$$1 = \int d\Omega_p \int dp p^{D-1} f_N(\epsilon) , \quad (3.11)$$

feltételből következik, valamint az egyes eseményekben keletkező hadronok száma a

$$p(N) = A_m (N - N_0)^{\alpha-1} e^{-\beta (N - N_0)} , \quad (3.12)$$

eloszlás szerint ingadozik, az átlagos hadron spektrum,

$$\frac{d\sigma}{d^D p} \propto \frac{(1-x)^{\nu(N_0)}}{\left(1 - \frac{D}{\beta} \ln(1-x)\right)^{\alpha+D+1}} , \quad (3.13)$$

tekinthető a Tsallis-Pareto eloszlás egy mikrokanonikus általánosításának. A számláló ki-
tevéőjében $\nu(N_0) = D(N_0 - 1) - 1$, az egy eseményben keletkező hadronok minimális száma
pedig $N_0 + 1$ (pl.: elektron-pozitron annihilációk esetén minimum két *jet* keletkezik, így a
színtöltés megmaradásának figyelembevétele nélkül is legalább két hadron kell keletkezzen).

3.4. A nem-extenzivitás és a szuper-statisztika kombi- nációja

3.4.1. Nem-extenzív kölcsönhatások és fluktuáló multiplicitás a kanonikus közelítésben

Érdekes módon az (1.1) alakú kölcsönhatások és a (3.2) alakú multiplicitás-fluktuációk
együttesen kialakíthatnak a (3.13)-hoz hasonló eloszlást, a termodinamikai limeszben érvé-
nyes kanonikus közelítésben számolva. Tételezzük fel, hogy az egyes ütközésekben keltett
hadronok eloszlása, az előző fejezetekben felsorolt okok valamelyike folytán, a Tsallis-Pareto
eloszlás! Ekkor a részecskék eloszlására kirótt

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3 p f(\epsilon) , \\ \frac{L(E)}{N} &= \int d^3 p \epsilon f(\epsilon) , \end{aligned} \quad (3.14)$$

feltételekből az

$$f(\epsilon) = A \exp\{-\beta L(\epsilon)\} \quad (3.15)$$

alakú eloszlás normafaktora

$$A = \frac{a^{D-1}}{\kappa_D} \left[\sum_{j=0}^{D-1} \binom{D-1}{j} (-)^{D-j-1} \frac{1}{\beta - (j+1)a} \right]^{-1} = \frac{\prod_{j=0}^{D-1} [\beta - (j+1)a]}{\kappa_D (D-1)!} , \quad (3.16)$$

valamint az egy részecskére eső átlagos „kvázi-energia”

$$\frac{L(E)}{N} = \frac{1}{a} \frac{\sum_{j=0}^D \binom{D}{j} (-)^{D-j} \frac{1}{\beta - (j+1)a}}{\sum_{j=0}^{D-1} \binom{D-1}{j} (-)^{D-j-1} \frac{1}{\beta - (j+1)a}} = \frac{DT}{1 - (D+1)aT} = \frac{DT}{1 - (D+1)(q-1)} . \quad (3.17)$$

A (3.17) egyenletben az utolsó egyenlőség abban az esetben áll fenn, ha a nem fundamentális paramétere a rendszernek, hanem az $a = (q-1)/T$ összefüggésből származtatható.

A (3.17) egyenletből következik, hogy $\beta \propto N$, így a (3.16) egyenletből az amplitúdó, $A \propto \beta^D \propto N^D$, vagyis a részecskék eloszlása

$$f_N(\epsilon) \propto N^D \exp\{-k N L(\epsilon)\} , \quad (3.18)$$

ahol $k = D/[L(E) (1 - (D+1)(q-1))]$. Ebből következően, ha a multiplicitás Euler-Gamma eloszlás szerint fluktuál, az átlagos spektrum

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d^D p} &= \sum_N p(N) N f_N(\epsilon) \approx \int_0^\infty dN N^{\alpha-1} \exp\{-\bar{\beta} N\} \times N \times N^D \exp\{-N L(\epsilon) k\} \\ &\propto \frac{1}{[1 + b L(\epsilon)]^{\alpha+D+1}} . \end{aligned} \quad (3.19)$$

A $b = k/\bar{\beta}$ paraméterrel. Ha a részecskék között az $E_{12} = E_1 + E_2 - a E_1 E_2$ vonzó kölcsönhatás van, $L(\epsilon) = \pm(1/a) \ln(1 - a\epsilon)$, és így az (3.13)-hoz hasonló eloszlást kapunk,

$$\frac{dN}{d^D p} \approx \frac{A}{[1 - b \ln(1 - a\epsilon)]^{\alpha+D+1}} , \quad (3.20)$$

mely az elektron-pozitron ütközésekben tapasztalt spektrumokra is jól illeszthető.

3.4.2. Nem-extenzív kölcsönhatások és fluktuáló multiplicitás mikrokanonikusan

Ha mikrokanonikusan megismételjük az előző számolást, az egyszerűség kedvéért $D = 1$ dimenzióban, a részecskék eloszlása egy fix N multiplicitású eseményben a (2.1) és (2.15) képletekből

$$f_N(\epsilon) = A \exp\{-aL(\epsilon)\} \left(1 - \frac{L(\epsilon)}{L(E)}\right)^{N-2}, \quad (3.21)$$

az $A = (N-1)/L(E)$ normafaktort az

$$1 = \int_0^E dp f_N(\epsilon) \quad (3.22)$$

feltételből kapva. A multiplicitásra átlagolt spektrum pedig

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dp} &= \sum_N p(N) N f_N(\epsilon) \approx \int dN p(N) N f_N(\epsilon) \\ &= \frac{e^{-aL(\epsilon)}}{L(E)} \int_{N_0}^{\infty} dN (N - N_0)^{\alpha-1} e^{-\tilde{\beta}(N-N_0)} N(N-1) \left(1 - \frac{L(\epsilon)}{L(E)}\right)^{N-2} \\ &\approx \frac{A e^{-aL(\epsilon)} \left(1 - \frac{L(\epsilon)}{L(E)}\right)^{\nu(N_0)}}{\left[1 - (1/\hat{\beta}) \ln \left(1 - \frac{L(\epsilon)}{L(E)}\right)\right]^{\alpha+2}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

4. fejezet

Általánosított-statisztikus hadronizációs modellek

A hadronizációt alapvetően kétféle modellesaláddal írják le. A koaleszcencia modellek kvarkok összeállásából, míg a fragmentációs modellek a *jetek* vezető partonjainak sugárzásából származtatják a hadronokat.

A koaleszcencia modellek alapvetően három dologban különböznek:

- 1) Milyen hadronizációs mátrixelemet használnak a kvark és hadron állapotok között, illetve direkt, vagy rezonancia bomláson keresztül keltik-e a hadronokat.
- 2) Milyen szabadsági fokokkal jellemzik a kvark-gluon plazmát: tömeghéjon vannak-e a kvarkok, és ha igen, valencia, vagy áram-kvarkokkal, vagy esetleg valamilyen $g(m)$ tömegeloszlású kvarkokkal számolnak, illetve mi a kvarkok energia szerinti eloszlása.
- 3) A plazma tágulását milyen transzport modellel (pl. viszkózus/nem-viszkózus hidrodinamika) írják le, illetve milyen hadronizációs hiperfelületet írnak elő.

A [73, 53] cikkekben rezonanciák bomlásából származtatják az egyes hadronok spektrumait, míg a [79]-[82] és [57]-[65] cikkekben közölt modellek tömeghéjon lévő kvarkokkal számolnak közvetlen hadronprodukción. A [79, 80] cikkekben a hadronizáció előtti kvark-gloun plazmát különböző tömegű kvarkok ideális gázkeverékével modellezzik, melyek tömegének eloszlását a [8, 9, 10] cikkekben közölt módon származtatják rács-QCD állapotegyenletből.

A felsorolt modellek kvalitatíve hasonló hadronspektrumokat produkálnak, az egyes azonosított részecsspektrumokra 1.2-2 faktoron belül illeszthetőek, és két alapvető tanulság szűrhető le belőlük. Egyrészt kiderül, hogy a Bjorken-féle nyalábirányban skálázó áramlási profil jól modellezi a RHIC energiás Au-Au ütközésekben keltett hadronok pszeudorapiditás eloszlását; s ha erre az áramlásra még egy nyalábirányra merőleges, radiális áram-

lás is szuperonálódik, a transzverz hadronspektrumok is jól leírhatók. Másrészt a kvarkok energia szerinti eloszlására Boltzmann-eloszlást használva a keltett hadronok spektruma is exponenciális aszimptotikájú lesz, míg a Tsallis-Pareto eloszlású kvarkokból összeállt hadronok eloszlása hatványlecsengést mutat. Ebből következően a transzverz spektrumokat a Boltzmann-eloszlásra épülő modellek $p_T \leq 2\text{--}3$ GeV tartományon írják le, míg a Tsallis-Pareto eloszlást használó modellek a $p_T \leq 5\text{--}6$ GeV tartományon.

A fragmentáció folyamatának leírására nem-perturbatív jellege miatt a koaleszcencia modellekhez hasonlóan csak fenomenologikus modellek léteznek. Ezek közül legelterjedtebbek az elektron-pozitron annihilációs kísérletek alapján parametrizált, a [152, 153] cikkekben közölt, ú.n. *fragmentációs függvények*. Ezek mellett, főleg nehéz kvarkok fragmentációjának leírására, a [96]–[98] nem-perturbatív modelleket is használják. A [92]–[95] cikkekben és a 4.3. részben bemutatott egy statisztikus fragmentációs modellt, melynek parton-modell számolásokban való implementációját jelenleg is vizsgáljuk (ld. [78] cikk).

4.1. Termikus hadronkeltés kvark koaleszcenciával

$\sqrt{s} = 200$ AGeV ütközési energiás nehézion ütközésekben kvark-gluon plazma (QGP, Quark Gluon Plasma) keletkezik, amit a RHIC gyorsító 2003-ban a *jet*-elnyomás kimutatásával kísérletileg bizonyított (ld. a [5, 6] referenciákat). SPS energiákon még nem tapasztaltak jel-elnyomást. Azt, hogy mi az a küszöbenergia, melyen felül kimutatható a jelenség, jelenleg is vizsgálják a RHIC fizikusai. Számos kollektív effektus utal arra, hogy az előállított QGP legalábbis lokálisan termális állapotba kerül. Az, hogy a QGP eléri-e a termális állapotot, majd aztán milyen gyorsan hadronizálódik, illetve milyen hatással vannak a hadronspektrumokra a hadronikus fázisban lezajló folyamatok, jelenleg is intenzíven vizsgált kérdéskör. Mindenesetre az itt bemutatásra kerülő egyszerű kvark koaleszcencia modell (ld. [81, 71] cikkek) keretei között is jól reprodukálhatók a RHIC energián mért hadronspektrumok.

Hadronizáció

A koaleszcencia modellek alapfeltevése, hogy a hadronizáció gyorsabban végbemegy, mintsem hogy a kvarkok eloszlása, $f_q(x, p)$ a folyamat közben megváltozna. A QGP szabadságfokait konstituens, vagy csupasz kvarkokkal írják le, melyek hadronkeltési valószínűségét valamilyen $C(x_i, p_i)$, a hadronizálódó kvarkok fázistér változóitól függő függvénnyel modellezik. Ezekből a keletkező hadronok lokális momentum eloszlása a plazmával együttmozgó rendszerben

$$F_h(P_h, x) = f_q(x, p_{q_1}) * \dots * f_q(x, p_{q_n}) C(x, p_{q_i}), \quad (4.1)$$

vagyis a kvarkeloszlások momentum térbeli konvolúciójaként áll elő. A kvarkok eloszlására Boltzmann, illetve Tsallis-Pareto eloszlást szokás használni, a hadronizációs feltételre viszont többféle javaslat is létezik. M_R tömegű mezon rezonanciák keletkezésének modellezésére a

$$C_R(p_1^\mu, p_2^\mu) \propto \delta((p_{q_1} + p_{q_2})^2 - M_R^2) \delta^4(p_{q_1}^\mu + p_{q_2}^\mu - P_h^\mu) \quad (4.2)$$

alak a kézenfekvő, és a kvarkok nincsenek tömeghőjön. Hosszabb élettartamú hadronok és tömeghőjén levő kvarkok esetében a

$$C(p_{q_i}) = \delta^3\left(\sum_i \vec{p}_{q_i} - \vec{P}_h\right) \prod_{i,j} \delta^3(\vec{q}_{i,j}) \quad (4.3)$$

ansatz-ot szokták használni, amely tiltja a hadronizálódó kvarkok hármassimpulzus különbségét a $\vec{q}_{i,j} = \vec{p}_{q_i} - \vec{p}_{q_j} = 0$ feltétellel. A (4.3) feltételt választva a lokális hadroneloszlásra nagy impulzusok esetén az

$$F_h(P_h) \propto f_q^n \left(\vec{P}_h/n \right) \quad (4.4)$$

közelítő formula adódik, amely Boltzmann vagy Tsallis-Pareto eloszlású kvarkokra szintén Boltzmann vagy Tsallis-Pareto eloszlású hadronok keletkezését eredményezi, a hadron és kvark hőmérsékletek közötti $T_h = T_q$ összefüggéssel:

$$e^{-P_h/T_h} \propto \left(e^{-(P_h/n)/T_q} \right)^n \rightarrow T_h = T_q. \quad (4.5)$$

Tsallis-Pareto eloszlású kvarkok esetén viszont a kvark és hadron nem-extenzivitási paraméterekre a $q_q - 1 = n(q_h - 1)$ reláció adódik, vagyis a hadroneloszlások hatványában kvarkszám skálázást kell kapnunk, hasonlóan a v_2 elliptikus folyásparaméter momentumfüggéséhez:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{(q_h - 1) P_h}{T_h} \right)^{-1/(q_h - 1)} &\propto \left(1 + \frac{(q_q - 1) P_h}{T_q n} \right)^{-n/(q_q - 1)} \\ \rightarrow T_h = T_q, \quad q_q - 1 = n(q_h - 1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Alacsony impulzusok mellett viszont a (4.3) feltétel önmagában nem elégíti ki az energia megmaradást, ugyanis a kvark impulzusokra adódó $\vec{p}_{q_i} = \vec{P}_h/n$ relációból

$$E_h \approx M_h + \frac{\vec{P}_h^2}{2M_h} \neq \sum_i \left(m_{q_i} + \frac{(\vec{P}_h/n)^2}{2m_{q_i}} \right) \approx \sum_i \epsilon_{q_i} . \quad (4.7)$$

A (4.3) energiamegmaradást helyreállítja a [81] cikkben leírt gondolatmenet: tegyük fel, hogy a csupasz kvarkokéhoz képest nagy hadron nyugalmi energiát a hadronizálódó kvarkok az őket körülvevő gluonfűdőből szerzik. Feltéve, hogy a kvarkok közti teret lukacsosan valamilyen effektív d dimenzióban gluonikus fluxuscsovek töltik ki, melyek hosszeloszlásából következő tömegeloszlása

$$G(m) \sim \exp \left(- \left[\Gamma(1 + 1/d) \frac{m}{\langle m \rangle} \right]^d \right) , \quad (4.8)$$

az energiamérleg a glounokkal kiegészítve

$$E_h = \sum_i \epsilon_{q_i} + m , \quad (4.9)$$

ahol $m = \sigma l$ az l hosszúságú, σ húrállandójú gluoncső energiája. Ezzel a hadroneloszlás az

$$F_h(P_h) = \int \prod_i d^3 \mathbf{p}_{q_i} f_q(\epsilon_{q_i}) G(m) C(\mathbf{p}_{q_i}) \delta \left(\sum_i \epsilon_{q_i} + m - E_h \right) \quad (4.10)$$

formulából a teljes momentumtartományon Tsallis-Pareto eloszlású. A π^0 , K^\pm , és p^- részecskékbe beépülő gluoncsövek (4.8) szerinti energia eloszlásának deriváltját, $g(m) = G'(m)$ -et a 4.1. ábra mutatja.

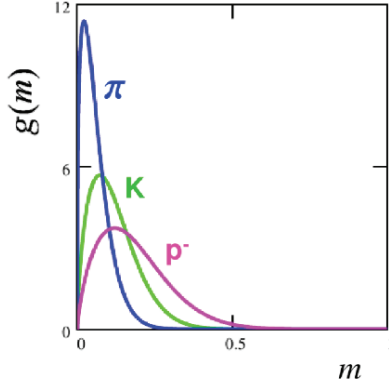
A plazma áramlásának hatása

Az előző részben láthattuk, hogy egy lokálisan termikus, Boltzmann vagy Tsallis-Pareto statisztikájú kvark szabadsági fokokkal jellemezhető QGP-ből koaleszcencia modellel lokálisan szintén Boltzmann vagy Tsallis-Pareto eloszlású hadronok keletkeznek. Ebben a részben megmutatom, hogyan módosul a lokális hadroneloszlás a plazma egyszerű ún. Blast Wave áramlásának hatására a detektorból nézve.

A legegyszerűbb relativisztikus hidrodinamikai modellt az u^μ sebességprofil segítségével definiált, ideális

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (4.11)$$

energia-impulzus tenzorból nyert megmaradási törvények, a



4.1. ábra. A (4.3), (4.8) és (4.10) képletekkel definiált termikus koaleszcencia modellben (ld. [81]) a keletkező π^0 , K^\pm , és p^- részecskékbé beépülő gluonok energiaeloszlásának deriváltja. A kísérleti spektrumok alapján az eloszlások paraméterei: $\langle m \rangle_\pi = 60$ MeV, $\langle m \rangle_K = 120$ MeV és $\langle m \rangle_{p^-} = 185$ MeV, valamint $d_\pi = 1.30$, $d_K = 1.60$ és $d_{p^-} = 1.67$.

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.12)$$

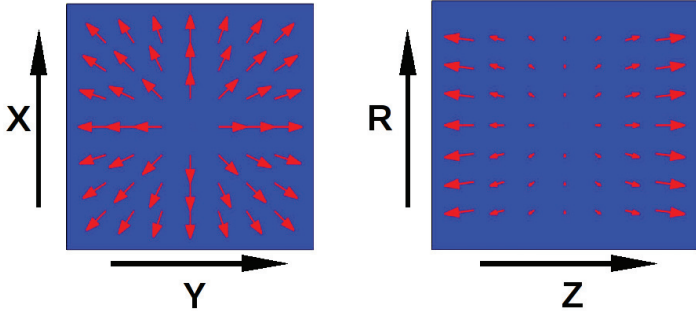
egyenletnek a sebességtérre, illetve arra merőleges irányra vett vetületei definiálják:

$$\begin{aligned} u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= 0, \\ (g_{\nu\lambda} - u_\nu u_\lambda) \partial_\mu T^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Az egyenletpár legegyszerűbb megoldásai a sajátidőben állandó sebességű, ún. skálázó áramlások:

$$u_\mu = \frac{x_\mu}{s} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{ds} u_\mu = 0. \quad (4.14)$$

A plazma tágulását a nyaláb irányában (z – *tengely*) skálázó (Bjorken-féle), a nyalábra merőleges síkban (transzverzális, $x y$ sík) pedig radiális és konstans sebességvetületű, ún. *Blast Wave* (lökéshullám) áramlási képpel modellezem. A *Blast Wave* áramlási profilt ((4.15) képlet) a 4.2. ábra szemlélteti.



4.2. ábra. *Blast Wave* áramlási kép: a nyalábra merőleges síkban (xy sík) radiális és állandó sebességű (baloldali ábra), a nyaláb irányában Bjorken-féle (jobboldali ábra).

$$u^\mu = (\gamma \cosh \eta, \gamma \sinh \eta, \gamma v \cos \phi, \gamma v \sin \phi), \quad (4.15)$$

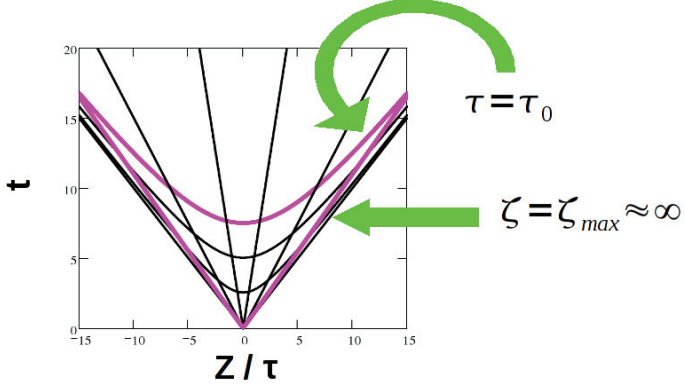
v a radiális sebesség, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, η a longitudinális pszeudo-rapidity, ϕ pedig az azimutális szög.

Miután a (4.13) képlettel definiált, nem-viszkózus, relativisztikus hidrodinamikai egyenletek szerint táguló plazma entrópiája sajátidőben konstans,

$$\frac{dS}{ds} = 0, \quad (4.16)$$

vagyis a kvark-gloun anyag adiabatikusan tágul és hűl, a hőmérséklete csak az adott térfogatelem sajátidejétől függ. Így várhatóan a hadronizáció valamilyen s_0 sajátidőpontban következik be, melynél a térfogatelem eléri a T_0 átalakulási hőmérsékletet. Mivel a plazma egy nehézion ütközésben longitudinális irányban (nyalábirány) sokkal gyorsabban tágul, mint a transzverzális irányban (a nyalábra merőlegesen), jó közelítéssel használható az s_0 hadronizációs sajátidő helyett a τ_b longitudinális hadronizációs sajátidő (b, mint *break up*, felszakadás). Megengedve továbbá, hogy a táguló plazma felületéről a rehadronizációt megelőzően is kiválhassanak hadronok, kapjuk a $d^3\sigma^\mu$ hadronizációs hiperfelületet, melyről a detektorba érkező, p^μ impulzusú hadronok száma

$$\frac{d^3N}{dp^3} = \int J_\mu d^3\sigma^\mu, \quad (4.17)$$



4.3. ábra. A hadronizációs hiperfelület $t - z$ síkbeli vetülete. A $\sqrt{t^2 - z^2} = \text{konstans}$ hiperbolák az állandó longitudinális sajátidejű görbék, melyek közül a lila színű mentén hadronizálódik el a plazma teljes térfogata. Ez adja a (4.24) spektrum térfogati járulékat, Y_0 -t. Az origóból induló egyenesek mentén a plazma áramlási sebessége állandó. A lila egyenesek a nyalábiránnyal (z -tengely) párhuzamos, henger alakú plazma végeinek z koordinátáit jelölik. Mivel a plazma végei közel fénysebességgel távolodnak a detektortól, a belőlük származó felületi hadronjárulék, Y_1 gyakorlatilag nem éri el a detektort.

a hadronizációs felületen áthaladó $J^\mu = (p^\mu/E) F_h$ hadron négyesárammal, és a (4.10) alapján számolt lokális hadroneloszlással. A $d^3\sigma^\mu$ hadronizációs felület $t - z$ síkra vett vetületét a 4.3. ábra mutatja. A (4.17) képletet végigsorozva a detektált részecske energiájával kapjuk a kísérletekben mért ún. invariáns spektrumot, a *Cooper-Frye formulát* (ld. [12]):

$$E \frac{d^3N}{dp^3} = \frac{dN}{p_T dp_T dy d\varphi} = \int F(u^\nu \cdot p_\nu) p_\mu d^3\sigma^\mu, \quad (4.18)$$

melyben $u_\mu(x)$ a normált áramlási sebesség ($u_i u^i = +1$) a hiperfelületen. A detektált hadron p^μ négyesimpulzusát és a hadronizációs felületet befutó x^μ téridő koordinátákat az

$$\begin{aligned} x^\mu &= (\tau \operatorname{ch} \zeta, \tau \operatorname{sh} \zeta, r \cos \alpha, r \sin \alpha), \\ p^\mu &= (m_T \operatorname{ch} y, m_T \operatorname{sh} y, p_T \cos \varphi, p_T \sin \varphi), \end{aligned} \quad (4.19)$$

módon érdemes paraméterezni, itt r a transzverzális rádiusz, $\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}$ a longitudinális koordináta-rapidity, α az x téridő-koordináta azimutális szöge, p_T a detektált részecske transzverzális impulzusa, $m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$ az ún. „transzverzális energiája”, vagy „tömege”, y a longitudinális rapiditása és $E = m_T \cosh(y)$ az energiája, φ pedig az azimutális szöge. Mindezekből a (4.17) képletben az integrálmérték a következő:

$$\begin{aligned}
p_\mu d^3\sigma^\mu &= m_T \cosh(y - \zeta) \tau r d\zeta dr d\alpha \\
&+ m_T \sinh(y - \zeta) r d\tau dr d\alpha \\
&+ p_T \cos(\varphi - \alpha) \tau r d\tau d\zeta d\alpha \\
&+ p_T \sin(\varphi - \alpha) \tau d\tau d\zeta dr.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Mivel az áramlás radiális a nyalábra merőleges síkban, valamint skálázó a nyaláb irányában, a (4.15) képletben $\phi = \alpha$ és $\eta = \zeta$. Így a plazmával együtt mozgó rendszerben a detektált részecske energiája

$$E^{co} = u^\mu p_\mu = \gamma [m_T \cosh(y - \zeta) - v p_T \cos(\varphi - \alpha)]. \tag{4.21}$$

A (4.18) és (4.20) képletből a mért spektrum négy tagból áll:

$$E \frac{d^3N}{dp^3} = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_4, \tag{4.22}$$

melyek

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \tau_b \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R dr r \int_{-z}^{+z} d\zeta m_T \cosh(y - \zeta) F(\tau_b, \zeta, r, \alpha), \\
Y_1 &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R dr r \int_0^{\tau_b} d\tau m_T \left[\sinh(y - z) F(\tau, +z, r, \alpha) - \sinh(y + z) F(\tau, -z, r, \alpha) \right], \\
Y_2 &= R \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-z}^{+z} d\zeta \int_0^{\tau_b} d\tau \tau p_T \cos(\varphi - \alpha) F(\tau, \zeta, R, \alpha), \\
Y_3 &= \int_0^R dr \int_{-z}^{+z} d\zeta \int_0^{\tau_b} d\tau \tau p_T \left[\sin(\varphi - 2\pi) F(\tau, \zeta, r, 2\pi) - \sin(\varphi) F(\tau, \zeta, r, 0) \right].
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Ezen tagok közül a harmadik, $Y_3 = 0$, mivel $F(E^{\text{co}})$ periodikus α -ban, valamint $Y_1 \mapsto 0$ a $z \mapsto \infty$ limeszt véve. A spektrum eredményképpen egy térfogati, Y_0 és egy felületi, Y_2 hadronjárulékot tartalmaz. A (4.23) képletekben a $\zeta \rightarrow \zeta + y$ és $\alpha \rightarrow \alpha + \varphi$ változó eloszlás után kapjuk a lokális, F_h és a detektált, $E dN/d^3p$ hadroneloszlások közti összefüggést:

$$E \frac{d^3N}{dp^3} = A \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{2\pi} d\alpha F(-\beta E^{\text{co}}) \left[\xi m_T \cosh \zeta + (1 - \xi) p_T \cos \alpha \right], \quad (4.24)$$

melyben

$$\begin{aligned} A \xi &= 2\pi \int_0^R r \tau(r) dr = \pi R^2 \tau_b, \\ A(1 - \xi) &= 2\pi \int_{\tau(0)}^{\tau(R)} r(\tau) \tau d\tau = \pi \tau_b^2 R. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A (4.25) képlet első integráljában $\tau(r) = \tau_b$, a másodikban pedig $r(\tau) = R$.

Ha a lokális hadroneloszlás Boltzmann, $F_h(P_h) \propto \exp\{-\beta E_h^{\text{co}}\}$, az invariáns hadronspektrum

$$E \frac{d^3N}{dp^3} = A \left[\xi m_T K_1(\beta \gamma m_T) I_0(\beta \gamma v p_T) + (1 - \xi) p_T K_0(\beta \gamma m_T) I_1(\beta \gamma v p_T) \right]. \quad (4.26)$$

A $K_n(x)$ és $I_n(x)$ imaginárius argumentumú Bessel-függvények. A kapott spektrum $p_T \geq 2$ GeV transzverzális impulzus esetén közel exponenciálisan csökkenő függvénye az $E^* = \gamma(m_T - v p_T)$, transzverzális plazmaáramlással együttmozgó rendszerbeli hadron energiának.

Ha azonban a plazmából keletkező hadronok lokálisan Tsallis-Pareto eloszlásúak, a számoláshoz érdemes az eloszlás [32]-[36] cikkekben leírt Euler-Gamma reprezentációját használni. Így a hadronspektrum

$$\begin{aligned} \frac{dN}{p_T dp_T dy_{y=0}} &= \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^{\infty} dw w^{c-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{2\pi} d\alpha \left[\xi m_T \cosh \zeta + (1 - \xi) p_T \cos \alpha \right] \times \\ &\quad \times \exp\{-w[1 + \beta E^{\text{co}}/c]\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

bevezetve a $c = 1/(q - 1)$ jelölést. Ezután a ζ és α szerinti integrálást analitikusan, a w

szerintit pedig a Gauss-Laguerre kvadratúrát használva, közelítőleg elvégezve az eredmény:

$$\frac{dN_{y=0}}{p_T dp_T dy} = A \frac{\xi m_T G_0(p_T) + (1 - \xi) p_T G_2(p_T)}{(1 + (q - 1)\beta E^*)^{1/(q-1)}}. \quad (4.28)$$

A Blast Wave plazmaáramlás figyelembevételére végeredményben a $p_T \cdot G_2$ -vel arányos felületi járulékok megjelenését eredményezi, valamint a térfogati tagot is módosítja egy G_0 faktorial. Mivel G_0 és G_2 p_T függése gyenge, az áramlás abban az esetben okoz jelentős spektrum-változást, ha a hadronok csak a p_T -vel arányos, s így kis impulzusok esetén zérushoz tartó, felületi járulékból származnak. A megjelenő G függvényeket a

$$\begin{aligned} G_{0,2}(p_T) &= \sum_j \frac{w_j z_j^{c-1}}{\Gamma(c)} e^{a_j - b_j} K_{1,0}(a_j) I_{0,1}(b_j), \\ a_j &= \frac{(q-1)\beta\gamma m_T}{1 + (q-1)\beta E^*} z_j, \\ b_j &= \frac{(q-1)\beta\gamma v p_T}{1 + (q-1)\beta E^*} z_j \end{aligned} \quad (4.29)$$

képletek definiálják, a $w_j = z_j/(n-1)^2 L(n+1, z_j)^2$ súlyokkal és $L(n, x)$ Laguerre polinomokkal, valamint az $L(n, z_j) = 0$ feltétellel.

Az itt bemutatott eredményeket a 5. fejezetben vetem össze a kísérleti adatokkal.

4.2. Nem-extenzív kvarkanyag hadronizációja rezonancia bomlással

Az előző részben bemutatott kvark-koaleszcencia modellben a hadronizálódó kvark-gluon plazmát a Tsallis-Pareto eloszlású kvarkkal és $G(m)$ tömegeloszlású gloun-húrokkal modelleztük. A hadronképzés során ezen kvázi-részecskék energiáinak összege épült bele a hadronokba, méghozzá additív módon. Abban az esetben viszont, ha a kvarkok eloszlása az (1.1) kölcsönhatások miatt alakul ki, a kvarkok saját kinetikus energiáin kívül nagy mennyiségű kölcsönhatási energia van a rendszerben, amelynek egy része beépül a hadronokba, nagy tömegű rezonanciák keltését eredményezve. Ebben a részben az [53] cikkben leírt modellt mutatom be.

Nem-extenzív partondinamikai szimuláció

Ebben a részben az (1.1) kölcsönhatásokkal definiált, ultra-relativisztikus ($\epsilon(\mathbf{p}_i) = |\mathbf{p}_i|$ diszperziós relációjú) részecskék impulzuseloszlásának időfejlődését vizsgálom. A rendszert

egy p_F sugarú Fermi-gömbön belül homogén eloszlásból indítom. Az időfejlődést véletlenszerűen kiválasztott részecskepárok közti ütközések adják. A részecskepárok ütközéseiben megmarad a hármasimpulzusok és az energiák formális logaritmusainak összege:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \\ L(\epsilon_1) + L(\epsilon_2) &= L(\epsilon_3) + L(\epsilon_4).\end{aligned}\quad (4.30)$$

(A (4.30) egyenlet második sora biztosítja a teljes rendszer energiájának megmaradását is.) Következésképpen a kirepülő kvarkok impulzusainak eloszlása

$$\begin{aligned}dw &= d^3p_1 d^3p_2 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{P}) \\ &\times \delta(E_1 + E_2 + aE_1E_2 - E_{in})\end{aligned}\quad (4.31)$$

melyben \vec{P} és E_{in} a bejövő kvarkpár összimpulzusa és energiája. p_2 -re kiintegrálva az „1”-es kvark energiájának eloszlása:

$$p(E_1) \sim \frac{E_1(E_{in} - E_1)}{(1 + aE_1)^2}.\quad (4.32)$$

Az „1”-es kvark energiájából a „2”-es kvark energiája

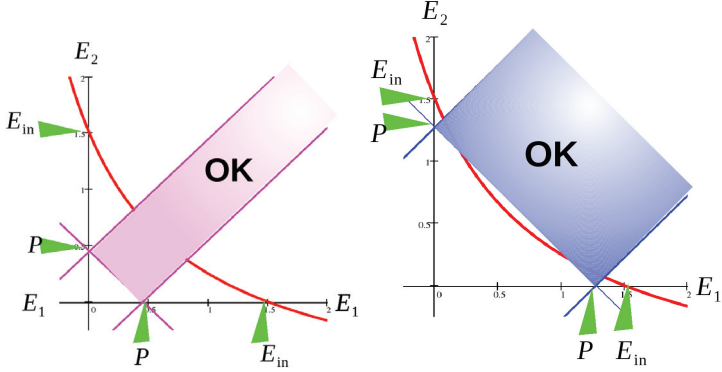
$$E_2 = \frac{E_{in} - E_1}{1 + aE_1}.\quad (4.33)$$

Mivel a részecskék tömegét elhanyagoltuk, a $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}$ egyenlet meghatározza az impulzusuk és \vec{P} közötti szöget, viszont a \vec{p}_1 , \vec{p}_2 és \vec{P} -re érvényes háromszög egyenlőtlenség miatt E_1 nem vehet fel tetszőleges értéket 0 és E_{in} között.

- Ha $P \leq \frac{2}{a}(\sqrt{1 + aE_{in}} - 1)$, E_1 az $E_1 \in \pm \frac{P}{a} - \frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{E_{in}}{a}}$ intervallumból választandó (ld. a 4.4. ábra bal oldalát);
- Ha $P > \frac{2}{a}(\sqrt{1 + aE_{in}} - 1)$, E_1 ki kell elégítenie az $E_1 \in \pm \frac{P}{a} - \frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{E_{in}}{a}}$ és az $E_1 \notin \frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - \frac{E_{in} - P}{a}}$ feltételeket (ld. a 4.4. ábra jobb oldalát).

A 4.2. alfejezet első részében definiált modell a Tsallis-Pareto eloszláshoz konvergál ((2.12) egyenlet abban az esetben, ha a formális logaritmus, $L(\epsilon) = (1/a) \ln(1 + a\epsilon)$)

$$\frac{d\mathcal{P}_N}{dp} = Ap^2(1 + a\epsilon)^{-\beta/a},\quad (4.34)$$



4.4. ábra. Az $E_1 - E_2$ sík abban az esetben, mikor a bejövő kvarkok P összipulzusa elegendően kicsi (**bal**), ill. elegendően nagy (**jobb**). A \vec{p}_1 , \vec{p}_2 és \vec{P} -re vonatkozó háromszög egyenlőtlenség miatt a kirepülő kvarkok E_1 és E_2 energiáinak a kiszínezett tartományon belül kell lennie. Ezen felül E_1 és E_2 ki kell, hogy elégítse a (4.32) egyenletet (piros görbe).



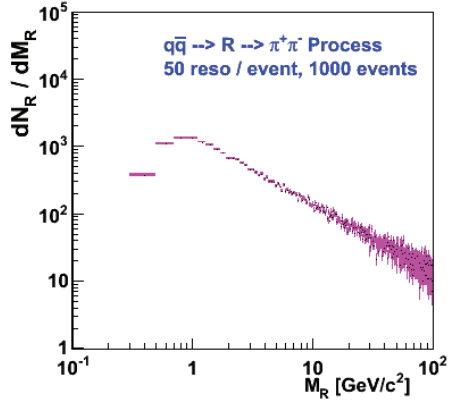
4.5. ábra. Nem-extenzív közegben lezajló rezonanciakeltés sematikus rajza. A foltok kvarkokat, a görbék a köztük lévő kölcsönhatásokat illusztrálják.

a Fermi gömbön belüli, homogén kezdeti eloszlásból indítva.

Rezonanciakeltés és bomlás

Az (1.4) egyenletből sejthető, hogy a rezonanciát alkotó, és az (1.1) kölcsönhatásokkal jellemzett nem-extenzív közeget elhagyó, színsemleges kvark-antikvark pár nagy mennyiségű kölcsönhatási energiát visz magával (ld. a rezonanciakeltés sematikus rajzát a 4.5. ábrán). A 3-as impulzus megmaradása miatt a keletkező hadron nem lehet tömeghéjon. A modell az egyszerűség kedvéért csak könnyű kvarkokkal dolgozik, és nem tesz különbséget a zérus tömegűnek vett u és d kvarkizék között. Ezen felül a rezonanciabomlás során csak egy pion-pár keletkezését tételezi fel.

A modell szerint, miután az (R) rezonancia elhagyta a kvarkanyagot, többé nem áll kölcsönhatásban azzal, így R energiája egyszerűen a kvarkanyag rezonanciakeltés előtti



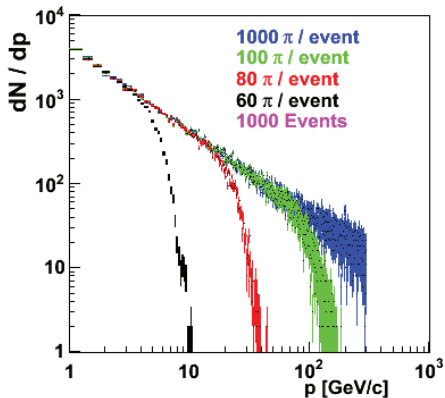
4.6. ábra. Szimulációs eredmény a 4.2. alfejezetbe leírt modellben keletkező rezonanciák tömegének eloszlására. A hisztogrammm 1000 eseményből készített statisztika, eseményenként 50 rezonancia keletkezett. A szimuláció során az $a = 1$ kölcsönhatási erősséget használtam.

(E_N), és utáni energiájának (E_{N-2}) különbsége:

$$\begin{aligned}
 E_R &= E_N - E_{N-2} = E_{12} \frac{1 + aE_N}{1 + aE_{12}} \\
 &\approx (1 + a\bar{\epsilon})^{N-2} (2\bar{\epsilon} + a\bar{\epsilon}^2) .
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$E_{12} = E_1 + E_2 + aE_1E_2$ a rezonanciát keltő $q\bar{q}$ pár energiája, nem számolva bele a közege többi részecskéjével való kölcsönhatást. A (4.34) egyenletben a második egyenlőség és az utolsó sor az (1.3) egyenlet következménye, $\bar{\epsilon}$ az egy kvarkra jutó átlagos energia. A (4.34) egyenletből látható, hogy a rezonancia energiája jóval meghaladhatja az öt keltő kvark-antikvark pár energiáját, míg impulzusa pontosan megegyezik a $q\bar{q}$ páréval. Következésképpen nagy tömegű rezonanciák keltése lehetséges, mint azt a 4.6. ábra is mutatja, a rezonanciák tömegének eloszlása, dN_R/dM_R két nagyságrenden át hatványeloszlást mutat M_R -ben. Ezzel szemben a rezonanciakeltés során alacsony tömegek, $M_R < 2m_\pi$ nem keletkezhetnek.

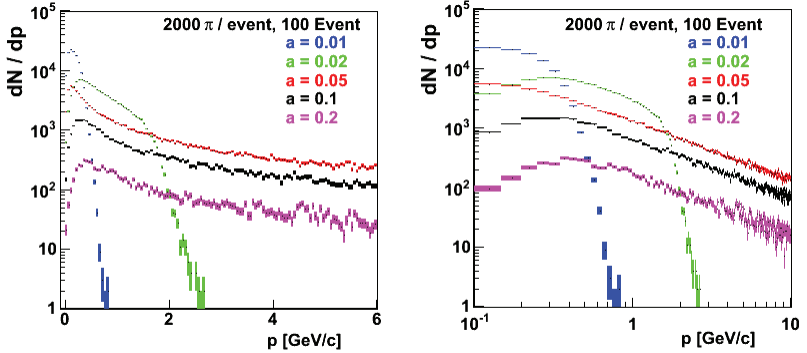
A rezonancia nyugalmi energiája a belőle bomló pionok kinetikus energiájához ad járulékot, hosszú hatványfarkat kölcsönözve a pionok impulzuseloszlásának, mint azt a 4.7 - 4.8.



4.7. ábra. Szimulációs eredmény a 4.2. fejezetben leírt modellben keletkező $\pi^+ + \pi^-$ spektrumokról. A különböző színű hisztogrammok eltérő multiplicitású eseményekből jövő pionok spektrumai. A hisztogrammok 1000 eseményből készített statisztikák. A szimuláció során az $a = 1$ kölcsönhatás erősséget használtam.

ábrák mutatják. A 4.7. ábra a végállapotú pionok eloszlásának a kiindulási kvarkok számától való függését mutatja az $a = 1$ kölcsönhatás erősség mellett (A $q\bar{q} \rightarrow R \rightarrow \pi^+\pi^-$ folyamatban a kiindulási kvarkok száma megegyezik a végállapotú pionok számával). Láthatóan a spektrumok a kanonikus tartományban (ahol $\epsilon \ll E_N$, vagyis a részecskék energiája sokkal a rendszer teljes energiája alatt van) a (4.34) alakúak. Nagyobb energiákon viszont ($\epsilon \gtrsim \epsilon_0$) a spektrumok levágnak. A levágás helye, ϵ_0 az összenergiával arányos, vagyis exponenciálisan nő a részecskék számával, $\epsilon_0 \sim (1 + a\bar{\epsilon})^N$.

A 4.8. ábrák a pion-spektrumok fix multiplicitás ($N = 2000$) melletti kölcsönhatás erősség (a) függését mutatják. Láthatólag míg a kölcsönhatás erőssége $a = 0.01$ -től $a = 0.2$ -ig nő a spektrum Boltzmann-eloszlásból Tsallis-Pareto eloszlássá alakul. Az $a = 0.01$ és $a = 0.02$ értékekhez tartozó spektrumok még közel Boltzmann-eloszlások (az ϵ_0 feletti levágást leszámítva), míg az $a = 0.05$, $a = 0.1$ és $a = 0.2$ értékekhez tartozó spektrumok már Tsallis-Pareto eloszlások.



4.8. ábra. Szimulációs eredmény a 4.2. fejezetben leírt modellben keletkező $\pi^+ + \pi^-$ spektrumokról, log-lin (bal) és log-log (jobb) skálán ábrázolva. A különböző színű hisztogrammok eltérő a kölcsönhatásereőség értékek esetében keletkező pionok spektrumai. A hisztogrammok 100 eseményből készített statisztikák, minden eseményben 2000 π -t keltemtem.

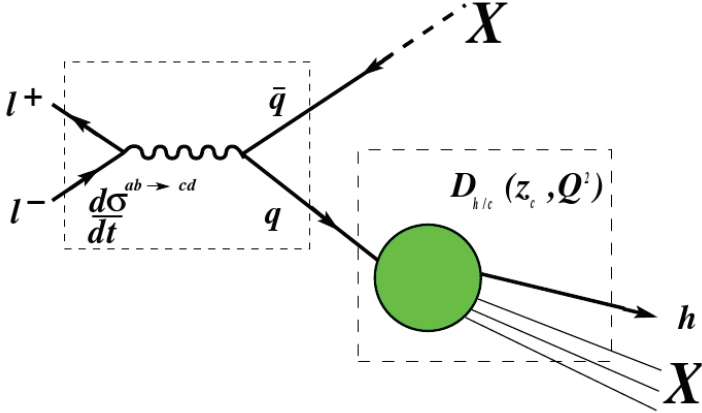
4.3. Szuperstatisztikus *jet*-fragmentáció

Ebben a részben egy statisztikus fizikai fragmentációs modellt mutatok be, aminek a parton-modell számolásokba való lehetséges implementációját, valamint a QCD skálafejlődésével való kapcsolatát jelenleg is vizsgáljuk. Az eddigi eredményeket a [78] és a [92] - [95] cikkek tartalmazzák.

A pQCD alapú parton-modell számolásokban a hadronizációt fragmentációs függvényekkel írják le (ld. a [154] referenciát). Az $F^h(x, s)$ fragmentációs függvény a \sqrt{s} ütközési energiás elektron-positron annihiláció során keltett h hadron inkluzív, differenciális hatáskeresztmetszete:

$$F^h(x, s) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow hX}}{dx}. \quad (4.36)$$

$x = 2E_h/\sqrt{s}$, a hadron által elvitt energiahányad, E_h a hadron energiája. A lepton-lepton annihilációban lezajló $l^+l^- \rightarrow (\gamma^*, Z_0^*) \rightarrow q\bar{q} \rightarrow hX$ hadronkeltési folyamatot a 4.9. ábra illusztrálja. A folyamat első része, az $l^+l^- \rightarrow (\gamma^*, Z_0^*) \rightarrow q\bar{q}$, virtuális foton (γ^*), vagy Z_0^* bozon keltésén keresztüli kvark-antikvark keltés során tisztán az elektroyenge, míg a kvark és antikvark keletkezése után az erős kölcsönhatás dominál.



4.9. ábra. Az $l^+l^- \rightarrow hX$ lepton-lepton annihilációban keltett c parton fragmentációja h hadronná (ld. a [158] referencia 20. oldalán a II. 6. ábrát).

Az $l^+l^- \rightarrow hX$ folyamat tovább bontható perturbatív és nem-perturbatív részfolyamatokra bevezetve az

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} e^+e^- \rightarrow hX = \sum_{p_i} \int_x^1 \frac{dz}{z} C_i(s, z, \alpha_s) D_{h/p_i}(x/z, s) \quad (4.37)$$

egyenlettel definiált $D_{h/p_i}(x, s)$ partonikus fragmentációs függvényeket. A (4.37) egyenletben szereplő $C_i(s, z, \alpha_s)$ együttthatófüggvények mondják meg a \sqrt{s} ütközési energiás $l^+l^- \rightarrow p_i$ reakcióban keltett p_i parton inkluzív hatáskeresztmetszetét a perturbáció számítás valamilyen rendjében ($z = 2E_{p_i}/\sqrt{s}$ a parton által elvitt energiahányad). Annak valószínűségét pedig, hogy a z energiahányadú p_i parton hadronizálódása során $x = 2E_h/\sqrt{s}$ energiahányaddal bíró h hadron keletkezik a $D_{h/p_i}(x/z, s)$ fragmentációs függvény adja meg. A perturbatív és nem-perturbatív folyamatok ilyen szétválasztását a parton-modellben *faktorizációnak* nevezik. A $D_{h/p_i}(x, s)$ partonikus fragmentációs függvények alakja általában függ a faktorizáció sémájától.

Partonmodell számolásokhoz az irodalomban általában a [152, 153] cikkekben közölt, *Albino-Kniehl-Kramer* (AKK) féle,

$$D_{h/p_i}^{AKK}(x, Q^2) = \tilde{N}_i x^{\alpha_i} (1-x)^{\beta_i} \left(1 + \frac{\gamma_i}{x}\right) \quad (4.38)$$

módon parametrizált függvényeket szokás használni. Az \tilde{N}_i , α_i , β_i és γ_i paraméterek Q^2 faktorizációs skálától való függését a *Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi* (DGLAP,

ld. a [155, 156, 157] referenciákat) féle

$$\frac{d}{d \ln Q^2} D_{h/p_i}(x, Q^2) = \sum_{p_j} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{p_i; p_j}(z, \alpha_s) D_{h/p_j}(x/z, Q^2) \quad (4.39)$$

egyenlet adja meg. Az \tilde{N}_i , α_i , β_i és γ_i paramétereket a 4.38. és 4.39. egyenletek alapján különböző $Q_0^2 = s_0$ ütközési energiákon mért hadronspektrumok alapján illesztik. A (4.39) egyenletben a $P_{p_i; p_j}(z, \alpha_s)$, ún. *splitting* („szétválás”) függvények a $q \rightarrow qg$, $g \rightarrow q\bar{q}$ és $g \rightarrow gg$ folyamatok amplitúdói α_s szerint sorbafejtve:

$$P_{p_i; p_j}(z, \alpha_s) = P_{p_i; p_j}^{(0)}(z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{p_i; p_j}^{(1)}(z) + \dots \quad (4.40)$$

A [78] cikkben megmutattuk, hogy a

$$D_{p_i}^\pi(z, Q^2) \sim \left(1 + \frac{q_i - 1}{T_i} z\right)^{-1/(q_i - 1)} \quad (4.41)$$

Tsallis-Pareto eloszlás a

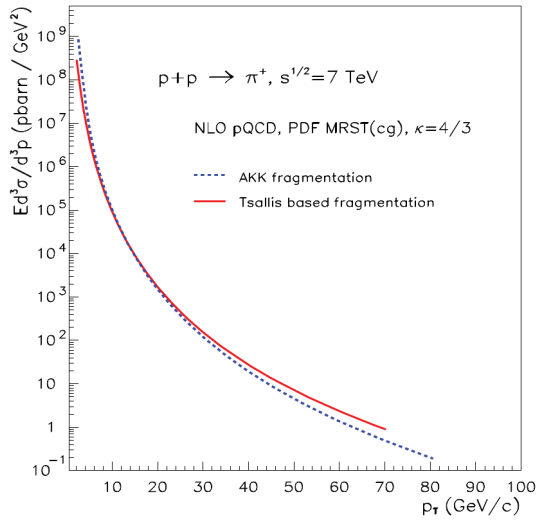
$$\begin{aligned} T_i(Q^2) &= T_{i1} \ln \ln Q^2 + T_{i0} , \\ q_i(Q^2) &= q_{i1} \ln \ln Q^2 + q_{i0} \end{aligned} \quad (4.42)$$

paraméterezéssel kielégíti a DGLAP egyenletet, és jól közelíti a $\pi = (\pi^+ + \pi^-)/2$ pionok fragmentációját leíró AKK függvényeket. Ezenfelül a (4.42) alakú fragmentációs függvény implementálva a [154] cikkben közölt parton-modell számolásba, kvalitatíve hasonló π^+ spektrumot eredményez, mint az AKK (ld. [78] referenciát, és a 4.10. ábrát).

A Tsallis-Pareto eloszlás fragmentációs függvényként való alkalmazhatóságának egy lehetséges magyarázata, a 3. fejezetben ismertetett szuper-statisztikus modell. Ha ugyanis az $l^+ l^- \rightarrow p_i$ partonprodukcíóba csak az $l^+ l^- \rightarrow q\bar{q}$ elektroyenge folyamatot vesszük bele (vagyis α_s -ben nulladrendben számolunk), perturbatíván nem keletkezik gluon, $C_g = 0$ és az egyes q_i kvarkok keltésének hatáskeresztmetszete $C_{q_i} = g_i(s) \delta(1 - z)$. Ekkor a (4.37) egyenlet az

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow hX}}{dx} = \sum_{p_i} D_{h/p_i}(x, s) \quad (4.43)$$

alakra egyszerűsödik, vagyis ebben a közelítésben a (4.37) egyenletben szereplő $F^h(x, s)$ a h hadronhoz tartozó, partonokra átlagolt fragmentációs függvény. Az 5.3. részben (va-



4.10. ábra. π^+ spektrum pQCD alapú parton-modell számolásban AKK (kék, szaggatott vonal) és Tsallis-Pareto (piros, folytonos vonal) alakú fragmentációs függvény használata esetén (ld. a [78] referenciát).

lamint a [92] cikkben) megmutatom, hogy a $\sqrt{s} \in [14 \text{ GeV}, 200 \text{ GeV}]$ ütközési energia tartományon megmért átlagolt töltött hadron fragmentációs függvények jól illeszthetők a (5.5) Tsallis-Pareto eloszlása az $x \leq 0.2$ Feynman- x tartományon, valamint azt, hogy az $e^+e^- \rightarrow hX$ folyamatokban keltett hadronok multiplicitás-eloszlásai jól illeszkednek a (3.2) Euler-Gamma eloszlásra. A (4.43) közelítésben minden eseményben két, $E_{jet} = \sqrt{s}/2$ energiájú *jet* keletkezik ($\sqrt{s} \geq M_Z$ esetén az események 90%-a *2-jet* esemény). Ha egy *jet* hadronjai Boltzmann-eloszlásúak, akkor - mint azt a 3. fejezetben láthattuk - a (3.2) alakú multiplicitás-fluktuációk az (5.5) átlagos fragmentációs függvényt okozzák.

A véges ütközési energia miatt azonban a Boltzmann-eloszlás csak alacsony energiás közelítés. Ha az $x \lesssim 1$ tartományon is alkalmazható modellt akarunk alkotni, mikrokanonikus hadroneloszlással kell számolni, eredményül pedig a teljes x tartományon jó közelítést adó (3.13) mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlás adódik (az illesztéseket az 5.3. rész tartalmazza).

Mivel a *jetek* hadronjai nem alkotnak termikus egyensúlyban lévő rendszert, eloszlásuk abban az esetben lehet mikrokanonikus, illetve alacsony energiás közelítésben Boltzmann-eloszlású, ha a *jet* hadronjaira teljesül az egyenlő valószínűségek elve (ld. 2. fejezet). Ez a $p_i \rightarrow h_1, h_2, \dots$ hadronkeltési folyamat hatáskeresztmetszetére azt jelenti, hogy

$$d\sigma^{p_i \rightarrow h_1, h_2, \dots} = |M|^2 \delta^{(4)} \left(\sum_j p_{h_j}^\mu - P_{p_i}^\mu \right) d\Omega \propto \delta \left(\sum_j \epsilon_{h_j} - E_{jet} \right) d\Omega. \quad (4.44)$$

Vagyis, ha a mátrixelem konstansnak vehető a kinematikailag megengedett tartományon, és ezenfelül a hadronprodukción során a kinematikára az egyedüli megszorítás a $\delta(\sum \epsilon_i - E_{jet})$ energiamegmaradás (ϵ_i a hadron energiája). Egy lehetséges ilyen helyzet, ha a *jet* hadronjait egydimenziós, ultrarelativisztikus sokasággal közelítjük. Ez a közelítés a nagy energiás és a *jet* irányával közel párhuzamosan repülő hadronok esetében indokolt. Mivel az ilyen hadronok mind egy irányba haladnak és a diszperziós relációjuk $\epsilon_i(\mathbf{p}_i) = |\mathbf{p}_i|$, az energia és impulzus megmaradása ugyanolyan alakot ölt: $\sum_i \epsilon_i = E_{jet}$. Ez ugyan az $x \ll 1$ hadronokra kevésbé jó közelítés, viszont tekintve, hogy a *jet* hadronjainak a *jet* irányára merőleges impulzusa, $p_T \leq 0.5 - 2 \text{ GeV}$ (ld. [96]-[98] cikkek) a hadronok fázistere nagyobb ütközési energiák esetén ténylegesen közel egydimenziós.

Megjegyzendő, hogy az (5.8)-hoz közeli eloszlások kaphatóak a kanonikus statisztika keretein belül is, ha egy rendszer az (1.1) alakú kölcsönhatásokkal és a Tsallis-Pareto féle entrópiával jellemezhető (ld. (1.33) képlet), illetve ha az (1.1) alakú kölcsönhatások és a (3.2) multiplicitás-fluktuációk egyaránt jelen vannak a rendszerben (ld. (3.19) képlet).

Skálaválasztás

A pQCD alapú parton-modell számolásokban a $D_{h/p_i}(x, Q^2)$ fragmentációs függvény Q^2 skálájának választására többféle javaslat létezik. Az itt bemutatott szuper-statisztikus leírásmódban a p_i parton h hadronná történő fragmentációját leíró

$$D_{h/p_i}(x, Q^2) = \sum_N p_{p_i}(N, Q^2) N f_N(x) \quad (4.45)$$

fragmentációs függvényt két skála jellemzi. Az egyik a vezető p_i parton E_{p_i} energiája, hiszen az N multiplicitású *jet* hadronjainak eloszlását megadó

$$f_N(x) = A (1-x)^{D(N-1)-1} \quad (4.46)$$

mikrokanonikus eloszlás az $x = E_h/E_{p_i}$ változótól függ (ld. a 3. fejezet 3.10. egyenletét). A másik skála a *jet*

$$p_{p_i}(N, Q^2) \propto (N - N_0)^{\alpha-1} \exp\{-\beta(N - N_0)\} , \quad (4.47)$$

multiplicitás-eloszlását (ld. a 3. és az 5. fejezetet) jellemző Q^2 skála.

A 2-*jet* események esetén mindkét vezető kvark energiája $E_q = \sqrt{s}/2$, és kézenfekvő a multiplicitás-eloszlás skáláját is $Q^2 = (\sqrt{s}/2)^2$ -nek választani. Az 5.3. részben látható, hogy a (4.47) eloszlás jól illeszthető az átlag töltött hadronok multiplicitás-eloszlásaira. Ebből arra lehet következtetni, hogy a *jetek* multiplicitás-eloszlásai feltehetőleg a $Q^2 = E_{jet}^2$ skálával jellemezhetők. Mivel azonban nem ismerjük a *jetek* multiplicitás-eloszlásainak *jet*-energia függését, ez a feltevés közvetlenül nem ellenőrizhető. Az előbbi feltevés mellett szólna, ha a multiplicitás-eloszlások skálásértést mutatnának. $\sqrt{s} \leq M_Z$ energiákon ugyanis jelentőssé válik a gluon-*jetek* hadronhozama. Ha valóban a *jet*-energia a multiplicitás-eloszlások természetes skálája, akkor a 3-*jet* események esetében az E_{q1} , E_{q2} kvark-*jet* energiák és az E_{g3} gluon-*jet* energia jelenik meg a hadroneloszlásokban a

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow hX}}{dx} = \sum_{p_i} \int_x^1 \frac{dz}{z} C_i(s, z, \alpha_s) D_{h/p_i}(x/z, E_{p_i}^2) \quad (4.48)$$

módon. A multiplicitás-eloszlás pedig az egyes parton-*jetek* multiplicitás-eloszlásainak konvolúciójaként kapható meg,

$$p_{tot}(N) = \sum_{\{N_i\}} \prod_{p_i} p_{p_i}(N_i, E_{p_i}^2) \delta_{\sum N_i, N} . \quad (4.49)$$

A (4.49) képlet természetesen nagy ütközési energián (ahol a 2-jet események dominálnak) \sqrt{s} -től függ,

$$p_{tot}^{2-jet}(N) = \sum_{N_q, N_{\bar{q}}} p_q(N_q, s/4) p_{\bar{q}}(N_{\bar{q}}, s/4) \delta_{N_q+N_{\bar{q}}, N} , \quad (4.50)$$

alacsony ütközési energián viszont sérül a skálafüggés. A KNO-skálahipotézis enyhe sérülése mellett érvelnek a [102]-[104] cikkekben is.

5. fejezet

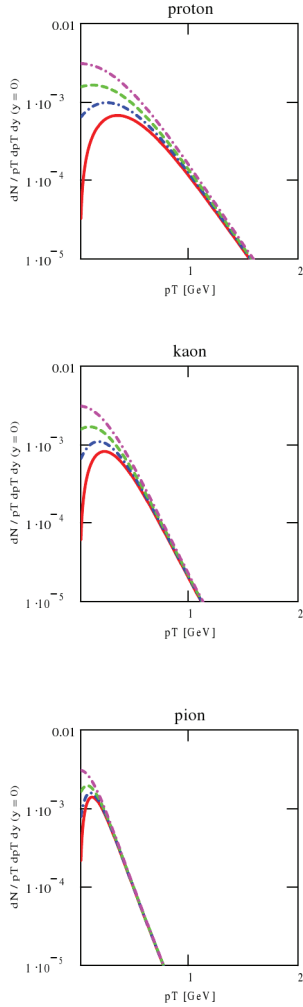
Elméleti eredményeim összehasonlítása a kísérletekkel

5.1. Nehézion ütközésekben mért azonosított hadronok spektrumai

Ebben a részben a [133]-[138] cikkekben közölt, a RHIC gyorsító STAR és PHENIX kísérletei által megmért, $\sqrt{s} = 200$ AGeV energiás AuAu atommag ütközésekben keltett π^0 , K^\pm , η , ϕ , p , \bar{p} , Λ , $\bar{\Lambda}$, Ξ^+ , Ξ^- részecskék spektrumait hasonlítom össze a 4.1 részben leírt, valamint a [71, 76, 81, 82] cikkekben publikált kvark-koaleszcencia modellben végzett számításaimmal.

A 4.1. részben leírt koaleszcencia modell lokálisan termális, „*Blast Wave*” (lökéshullám) áramlási profil szerint táguló, Boltzmann-eloszlású kvark-gluon plazmából kivált hadronok eloszlására a Boltzmann-eloszláshoz közeli (4.26) eloszlást jósolja. A mért és számolt hadronspektrumok arányait az egyes részecskékre az 5.2. ábra 1-10. paneljén látható zöld görbék mutatják. Láthatóan a Boltzmann-eloszlást használó modell a $p_T \leq 2$ GeV/c transzverz momentumú hadronok esetében ad kielégítő leírást.

Ha a kvarkanyag lokálisan Tsallis-Pareto eloszlást, a végállapoti hadronspektrum (4.28) alakja aszimptotikusan hatvány lecsengésű, az alacsony impulzusú viselkedést pedig a felületi és térfogati hadronjárulékok ξ aránya határozza meg. A p_T -vel arányos felületi járulék zérushoz, az m_T -vel arányos térfogati járulék pedig véges értékhez tart, ha a hadron impulzusa kicsi, $p_T \rightarrow 0$. Az 5.2. ábra 1-10. paneljain a tisztán térfogati tagból származó hadronok görbéit piros pontok, a tisztán felületi tagból származókéket kék háromszögek, a kétféle járulék fele-fele aránybani keverékét pedig fekete pontok jelölik. Láthatóan a kísérleti adatok ezen impulzus tartományon nem igazán érzékenyek a ξ arány változására. Ahol



5.1. ábra. Az ábrán a (4.28) hadronspektrumot jól közelítő (5.1) eloszlás látható p (fent), K (középen) és π (lent) részecskékre. A piros, kék, zöld és lila színű görbék rendre a $\xi = 0, 0.2, 0.5$ és 1 értékekhez tartoznak.

eltérés van a spektrumok között, ott a tisztán térfogati hadronok járuléka közelíti legjobban a méréseket. A pontosabb vizsgálathoz alacsonyabb impulzusokra is ismerni kellene a hadronok eloszlásait, ott azonban a PHENIX és STAR kísérletek nem képesek a részecskéket azonosítani. Az 5.1. ábrán a (4.28) hadronspektrumot jól közelítő

$$E \frac{dN}{d^3p} \approx A \frac{\xi m_T + (1 - \xi) p_T}{\left[1 + (q - 1) m_T/T\right]^{-1/(q-1)}} \quad (5.1)$$

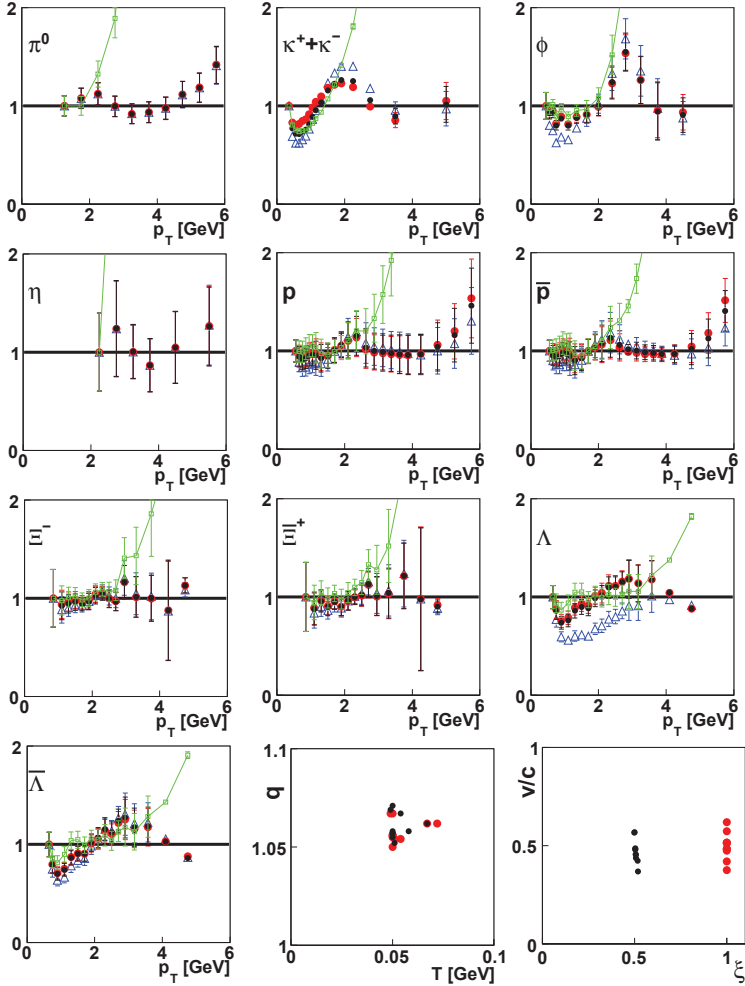
függvény látható π , K , és p részecskékre, különböző ξ térfogati és felületi hadronjárulék arány esetén (m_T a transzverz energia, $m_T^2 = p_T^2 + m^2$). Az 5.1. ábra jól érzékelteti, hogy a ξ értéke a hadronspektrumot csak a részecsketömegnél kisebb impulzusokra, $p_T \lesssim m$ befolyásolja jelentősen.

A 5.2. ábra 11. és 12. panelja az illesztett (4.28) eloszlás paramétereit mutatja az egyes részecskékre. A fekete pontok itt is a $\xi = 0.5$, a piros pontok pedig a $\xi = 1$ értékhez tartoznak. Az illesztett nem-extenzivitási paraméterek, hadron-hőmérséklet paraméterek, valamint nyalábirányra merőleges plazmaáramlási sebességek, rendre $q = 1.062 \pm 7.65 \times 10^{-3}$, $T = 51 \pm 10$ MeV és $v/c = 0.5 \pm 0.15$, közel vannak egymáshoz.

A 4.1. részben leírt modell azon feltevése, hogy a kvark-gluon plazmával együtt mozgó rendszerben Tsallis-Pareto eloszlású hadronok keletkeznek, és a plazma tágulása a „lökéshullám” áramlási profillal modellezhető, tehát összhangban van a RHIC kísérletek hadronspektrumaival a $p_T \leq 5$ GeV/c impultustartományon. Viszont a barion- és mezon-spektrumok hatványának arányára tett (4.6) képletből következő jóslatot, miszerint

$$\frac{q_B - 1}{q_M - 1} = \frac{2}{3}, \quad (5.2)$$

a kísérletek nem igazolják egyértelműen. Valamint nagyobb impulzusok esetén a modell nem írja le jól a hadronspektrumokat, bár azok $p_T \geq 5$ GeV esetén is hatványeloszlást követnek.



5.2. ábra. 1-10. panel: $\sqrt{s} = 200$ AGeV energiás AuAu ütközésekben keltett azonosított hadronok mért és számolt eloszlásainak hányadosai. Zöld négyzetek: Boltzmann termodinamikára épülő számolási eredmények; kék háromszögek, fekete és piros pontok rendre: a $\xi = 0, 0.5, 1$ felületi/térfogati hadronjárulék arányok mellett, nem-extenzív termodinamikát használó számolás eredményei; 11-12. panel: fit paraméterek. Az ábra a [71] cikkben jelent meg.

5.2. Proton-proton és proton-antiproton ütközésekben mért töltött hadronok spektrumai

Míg sem a RHIC, sem az LHC energiás nehézion ütközésekben keltett hadronok spektrumait nem írja le a teljes mérési tartományon a Tsallis-Pareto eloszlás, a proton-proton és proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok eloszlását igen (ld. [75, 147]). A vizsgált töltött hadron transzverz momentum eloszlásokat és a rájuk illesztett

$$E \frac{dN}{d^3p} = A m_T \left[1 + (q-1) m_T/T \right]^{-1/(q-1)} \quad (5.3)$$

Tsallis-Pareto, illetve

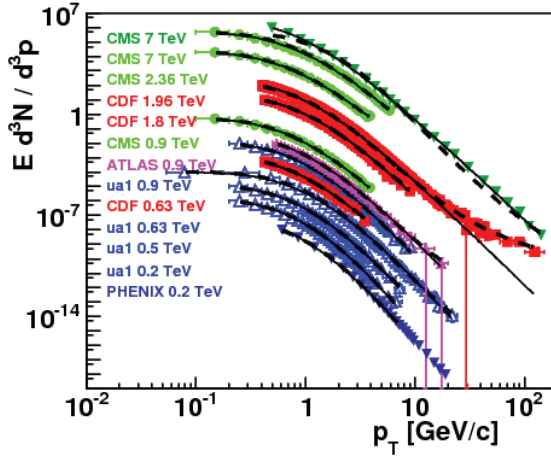
$$E \frac{dN}{d^3p} = A m_T \left[1 + (q-1) m_T/T \right]^{-1/(q-1) + 2 \ln \ln(1 + \kappa p_T)} \quad (5.4)$$

„skalázó Tsallis-Pareto” eloszlásokat az 5.3 - 5.8. ábrák mutatják. A spektrumokat a [139]-[146] cikkekben közzétették, a mérések rapiditás tartományát és ütközési energiáit az 5.2. táblázat foglalja össze.

kísérlet	\sqrt{s}	rapiditás tartomány
PHENIX	0.2 TeV	$ \eta \leq 0.35$
UA1	0.2 TeV	$ \eta \leq 0.8$
UA1	0.5 TeV	$ \eta \leq 0.8$
UA1	0.63 TeV	$ \eta \leq 0.6$
UA1	0.9 TeV	$ \eta \leq 0.8$
CDF	0.63 TeV	$ \eta \leq 1$
CDF	1.8 TeV	$ \eta \leq 1$
CDF	1.96 TeV	$ \eta \leq 1$
ATLAS	0.9 TeV	$ \eta \leq 1$
CMS	0.9 TeV	$ \eta \leq 0.2$
CMS	2.36 TeV	$ \eta \leq 0.2$
CMS	7 TeV	$ \eta \leq 2.4$

5.2. táblázat. Az 5.3 - 5.8. ábrákon látható spektrumok adatai.

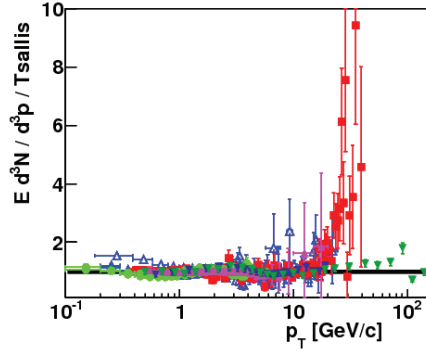
Az (5.4) eloszlást a [149]-[151] cikkek megfontolásaihoz hasonló érveléssel kapjuk az (5.3) függvényből, az $n_0 = 1/(q-1)$ hatványába bevezetve egy $n = n_0 - 2 \ln \ln(1 + \kappa p_T)$ skálafejlődést. Az 5.3. és 5.5. ábrákon látható, hogy az (5.4) eloszlás a $\kappa = 0.013$ érték



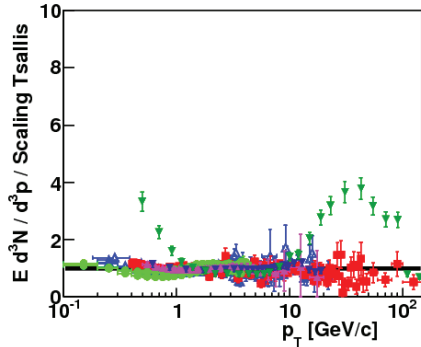
5.3. ábra. $\sqrt{s} = 0.2\text{-}7$ TeV energiákon mért proton-proton, ill. proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok invariáns spektrumai. A folytonos és szaggatott vonalak az (5.3) és (5.4) függvények illesztései. Az ábra a [75] cikkben jelent meg.

mellett jól leírja a $\sqrt{s} = 1.96$ TeV energián mért CDF spektrumot, viszont a $\sqrt{s} = 7$ TeV-es CMS adatoktól $p_T \leq 1$ GeV és $p_T \geq 10$ GeV impulzus tartományokon egy 4-es faktor erejéig eltér. Mivel a [141] cikkben közölt CDF eredmény a [75] cikk megjelenése óta visszavonásra került az (5.4) eloszlás skálásértését nem vizsgáltuk tovább. A proton-proton illetve proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok spektrumainak az (5.3) eloszlástól való eltérése a jelenlegi kísérleti ismeretek alapján elhanyagolható.

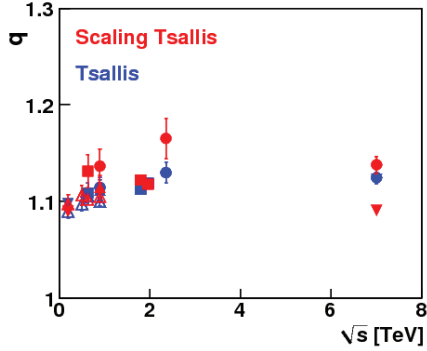
A (5.3) eloszlás paramétereinek \sqrt{s} fejlődését a 5.6 - 5.8 ábrák mutatják. Míg a „hőmérséklet” paraméter (amely a tisztán statisztikus értelmezés (2.9) egyenlete alapján az egy részecskére eső átlagenergiát jelenti) \sqrt{s} -től függetlenül $T \approx 100$ MeV-nek adódik, a spektrumok hatványát jellemző q paraméter lassan növekvő tendenciát mutat. Miután a következő részben vizsgált elektron-pozitron annihilációs kísérletek hadroneloszlásainak T és q paraméterei is hasonló \sqrt{s} függést mutatnak (ld: 5.11 és 5.12 ábra), valószínűsíthető, hogy a proton-proton reakciókban mért hadroneloszlások paramétereinek \sqrt{s} függése mögött is a fragmentációs függvények DGLAP (*Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi*) skálafejlődése áll (ld. [78]).



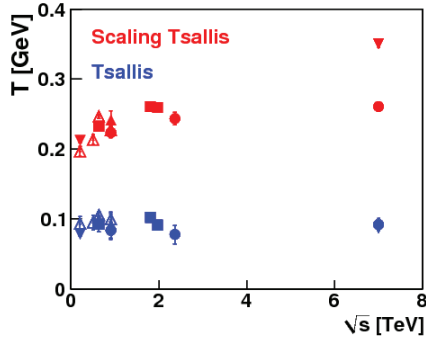
5.4. ábra. $\sqrt{s} = 0.2-7$ TeV energiákon mért proton-proton, ill. proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok invariáns spektrumainak, és a rájuk illesztett (5.3) Tsallis-Pareto eloszlásoknak a hányadosai. Az ábra a [75] cikkben jelent meg.



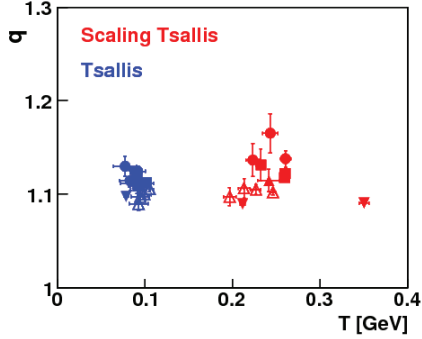
5.5. ábra. $\sqrt{s} = 0.2-7$ TeV energiákon mért proton-proton, ill. proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok invariáns spektrumainak, és a rájuk illesztett (5.4) „skalázó” Tsallis-Pareto eloszlásoknak a hányadosai. Az ábra a [75] cikkben jelent meg.



5.6. ábra. $\sqrt{s} = 0.2-7$ TeV energiákon mért proton-proton, ill. proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok invariáns spektrumaira illesztett (5.3) és (5.4) eloszlások q paraméterének \sqrt{s} függése. Az ábra a [75] cikkben jelent meg.



5.7. ábra. $\sqrt{s} = 0.2-7$ TeV energiákon mért proton-proton, ill. proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok invariáns spektrumaira illesztett (5.3) és (5.4) eloszlások T paraméterének \sqrt{s} függése. Az ábra a [75] cikkben jelent meg.



5.8. ábra. $\sqrt{s} = 0.2\text{-}7$ TeV energiákon mért proton-proton, ill. proton-antiproton ütközésekben keltett töltött hadronok invariáns spektrumaira illesztett (5.3) és (5.4) eloszlások $q - T$ paraméter tere. Az ábra a [75] cikkben jelent meg.

5.3. Elektron-pozitron ütközésekben mért fragmentációs függvények és multiplicitás-eloszlások

Töltött hadronok fragmentációs függvénye

Elektron-pozitron annihilációs kísérletekben mért töltött hadronok *Feynman- x* ($x = 2p/\sqrt{s}$) szerinti eloszlása, más néven fragmentációs függvénye szintén illeszthető a Tsallis-Pareto eloszlással,

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} = A x^{D-1} \left(1 + \frac{q-1}{T/(\sqrt{s}/2)} x \right)^{-1/(q-1)}, \quad (5.5)$$

az $x \lesssim 0.2$ tartományon, ami hadron momentumban $p \lesssim 0.1\sqrt{s}$ -nek felel meg. Az illesztéseket, valamint az eloszlás paramétereinek \sqrt{s} függését az 5.9 - 5.12. ábrák mutatják. A kísérleti adatokat a [105]-[111] cikkekben közzétették.

Megtévesztő módon „fragmentációs függvény”-nek nevezik a pQCD-val javított partonmodell számolásokban használt $D_{p_i}^h(z, Q^2)$ függvényeket is. Ezek a fenomenológián paraméterezett függvények annak a valószínűségét mondják meg, hogy egy *jet*-ben a p_i vezető parton egy h hadront kelt, amely a parton impulzusának z hányadát viszi magával, feltéve, hogy a hadronkeltés a Q^2 skálán zajlott le. A [78] cikk arról számol be, hogy az (5.5) képlethez hasonló alakú

$$D_{p_i}^\pi(z) \sim \left(1 + \frac{q_i - 1}{T_i} z\right)^{-1/(q_i - 1)} \quad (5.6)$$

eloszlás jól illeszthető a [152, 153] cikkekben közölt átlagos π fragmentációs függvényekre a

$$\begin{aligned} T_i(Q^2) &= T_{i1} \ln \ln Q^2 + T_{i0} , \\ q_i(Q^2) &= q_{i1} \ln \ln Q^2 + q_{i0} \end{aligned} \quad (5.7)$$

paraméterfejlődés esetén. Érdekes módon az egyes partonok fragmentációs függvényeinek paraméterei az 5.11. és 5.12. ábrákon látható skálafejlődéshez kvalitatíve hasonló \sqrt{s} függést mutatnak. Egy lehetséges magyarázat, hogy mivel egyrészt a $\sqrt{s} \geq M_Z$ energiákon az események több, mint 90%-a *2-jet* esemény (hiszen a sugárzási korrekciók a kis α_s erős csatolási állandó miatt kicsik), másrészt a keletkező hadronok több, mint 70%-a pion, a mért $d\sigma/dx$ eloszlások közel megegyeznek a kvark-pion fragmentációs függvényekkel ($D_q^\pi(x)$ -el).

Mivel az $x \approx 1$, nagyenergiás hadronok keltéséhez tartozó fázistér zérushoz tart, a keltéshez tartozó valószínűségnek is zérushoz kell tartania. Ennek az (5.5) eloszlás nem tesz eleget. Az elektron-pozitron annihilációkban minimum két *jet* keletkezik, így a keltett hadronok nem tehetnek szert nagyobb energiára, mint $E = \sqrt{s}/2$, vagyis egy *jet* energiája. A statisztikus fizika nyelvére lefordítva: a véges összenergia miatt mikrokanonikusan kell számolni. Megjegyzendő, hogy a jelenleg rendelkezésre álló proton-proton kísérletekben megmért hadronspektrumok mind beleesnek a $p_T \lesssim 0.1\sqrt{s}$ momentum tartományba, így talán nem meglepő, hogy a véges ütközési energia miatt fellépő véges fázistér problémája esetükben nem jelentkezik, ezért az egyébként kanonikus Tsallis-Pareto eloszlás kielégítően leírja a spektrumokat.

A Tsallis-Pareto eloszlást többféleképpen lehet mikrokanonikusan általánosítani. A szuperstatistikus származtatás esetén a (3.1), vagy (3.2) eloszlás szerint fluktuáló multiplicitás, vagy a (3.2) szerint fluktuáló inverz hőmérséklet eredményezi az átlagspektrum (3.9), illetve mikrokanonikus esetben a (3.13) alakját (ld. [84, 77] cikkek). Ennél általánosabb eloszláscsaládot eredményez, ha a rendszer részecskéi valamilyen formális logaritmuson keresztül hatnak kölcsön, és ezen felül vagy a multiplicitás (hőmérséklet) is fluktuál, vagy speciális korrelációk miatt nem-Boltzmann-Gibbs féle entrópia formula írja le a rendszert. Az eloszláscsaládokat ilyen esetekben a (3.19) és (1.33) formulák generálják tetszőleges $L(\epsilon)$ formális logaritmussal. Érdekes módon az utóbbi kölcsönhatások a kanonikus formalizmus keretei között lettek származtatva, mégis bizonyos paraméterek esetén kompakt tartójúvá válnak, és így alkalmasak lehetnek véges energiájú, mikrokanonikus rendszerek

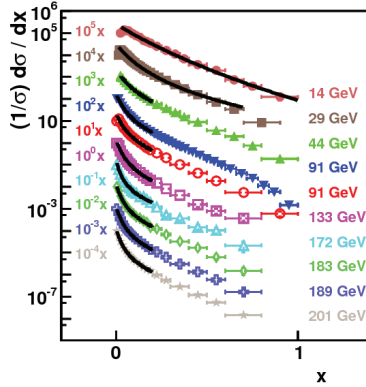
leírására is. Mivel a multiplicitás-fluktuációk és a kölcsönhatások vagy korrelációk miatti nem-extenzivitás ennyire hasonló átlageloszlásokat eredményez, csak akkor tudnánk megerősíteni, vagy kizárni az egyes modelleket, ha megmérnénk a hadroneloszlást fix multiplicitású *jet*ekben. Ha az azonos multiplicitású *jet*ekben mikrokanonikus hadroneloszlásokat látnánk, beigazolódna, hogy a multiplicitás-fluktuációk felelősek a fragmentációs függvények alakjáért. Ez esetben a fragmentáció folyamata tisztán statisztikus energiaeloszlású hadronokat produkál. Ha azonban a fix multiplicitású *jet*ekben a mikrokanonikustól eltérő hadroneloszlásokat mérnénk, esélyünk lenne a multiplicitás-fluktuációktól függetlenül vizsgálni a *jet*en belüli korrelációkat és kölcsönhatásokat.

Az elektron-pozitron ütközésekben mért töltött hadron eloszlások (fragmentációs függvények) és a rájuk illesztett, a szuper-statisztikus megközelítésből adódó mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((3.13) képlet a (5.5)-höz hasonló paraméterezéssel),

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{A x^{D-1} (1-x)^{D(N_0-1)-1}}{\left(1 - \frac{q-1}{T/(\sqrt{s}/2)} \ln(1-x)\right)^{1/(q-1)}}. \quad (5.8)$$

az 5.13-5.16 ábrákon láthatók. Az (5.5) kanonikus Tsallis-Pareto eloszláshoz képest az (5.8) mikrokanonikus változat q paraméterének \sqrt{s} szerinti látványos növekedése eltűnik, és a T paraméter csökkenő tendenciája is mérséklődik. Míg $D = 1$ dimenzióban az (5.5) eloszlás az $x \in [10^{-2}, 0.2]$ intervallumon illeszthető a mért fragmentációs függvényekre, az (5.8) eloszlás a jóval kiterjedtebb $x \in [10^{-2}, 1]$ tartományon ad jó leírást. $x \approx 0.01$ alatt mindkét eloszlás eltér a mérésektől, különösen $\sqrt{s} \leq M_Z$ esetén.

A probléma látszólag megoldható egy $D \sim 1/\sqrt{s}$ skálafüggő effektív dimenzió bevezetésével, mint ez az 5.17. és 5.18. ábrákon látható. Az effektus értelmezése azonban nem ilyen kézenfekvő. Nem az értendő alatta, hogy egy *jet*en belül lezajló hadronizáció a $\sqrt{s} = 200$ GeV energiás ütközésekben egy egydimenziós folyamat, míg a $\sqrt{s} = 14$ GeV energiás ütközésekben háromdimenziós. Tegyük fel, hogy a *jet*ben keletkező hadronok a *jet* irányához képest transzverzális impulzus komponense, p_T kisebb egy $p_{T0} = 2$ GeV/c küszöbértéknél! Ez esetben a maximális transzverz hadronimpulzus és maximális longitudinális hadronimpulzus (két *jet* esemény esetében $p_{L0} = \sqrt{s}/2$) aránya $p_{T0}/p_{L0} \approx 0.02$ értékről $p_{T0}/p_{L0} \approx 0.3$ értékre nő, mialatt az ütközési energia $\sqrt{s} = 200$ GeV-ről $\sqrt{s} = 14$ GeV-re csökken. Az alacsony, $p < p_{T0}$ impulzusú hadronok (ami $x < p_{T0}/(\sqrt{s}/2)$ momentum hányadot jelent) izotrop módon keletkezhetnek a *jet* félgömbjén belül, míg a nagy, $p \gg p_{T0}$ impulzusú hadronok kénytelenek közel a *jet* irányával párhuzamosan repülni. Vagyis a fázisér effektív dimenziója a p/p_{T0} hányadtól függ, nem az $x = p/\sqrt{s}$ hányadtól, ily módon a fragmentációs függvények skála-invarianciája sérül. A [96]–[98], nem-perturbatív fragmentációs modellekben is a spektrumok hasonló skálásérüléshez vezető $(m_T/E_{jet})^a$ ($a \sim 1-2$) energiafüggését



5.9. ábra. Különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények (a spektrumokat fentről lefele a [105, 106, 105, 107, 108, 109, 110, 110, 110, 111] cikkekben közölték), és a rájuk illesztett kanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((5.5) eloszlás a $D = 1$ érték mellett). Az ábra a [92] cikkben jelent meg.

javasolták (m_T a körülbelül 0.5 GeV nagyságrendjébe eső transzverzális hadron energia). A $\sqrt{s} < M_Z$ energiás spektrumok alakjának a nagyobb energiásoktól való eltéréséhez az is hozzájárulhat, hogy a Z bozon nyugalmi energiája alatti ütközési energiákon nem elhanyagolható a három-*jet* események hadronjáruléka sem.

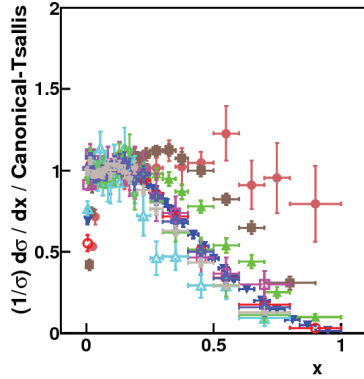
A $\sqrt{s} = 7$ TeV ütközési energián az LHC-ben végzett proton-proton ütközésekben keltett *jetek* fragmentációs függvényei az elektron-pozitron annihilációs kísérletekben mértékhez hasonlóan jól leírhatóak az (5.8) függvénnyel (ld. 5.19. ábra). A nagy luminozitásnak köszönhetően azonban az eloszlás q és T paraméterének a *jet* energiájától (mely a kísérletileg vizsgált kinematikai tartomány esetében jó közelítéssel megegyezik a *jet* transzverz momentumával) való függése pontosabban meghatározható (ld. 5.20 - 5.21. ábra). A q paraméter skálafüggésére mind a

$$q = 1 + \mu \ln \ln(p_{T,jet}/Q_0), \quad (5.9)$$

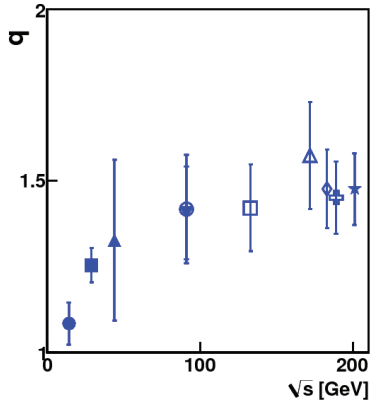
mind a

$$q = 1 + (p_{T,jet}/Q_0)^\mu \quad (5.10)$$

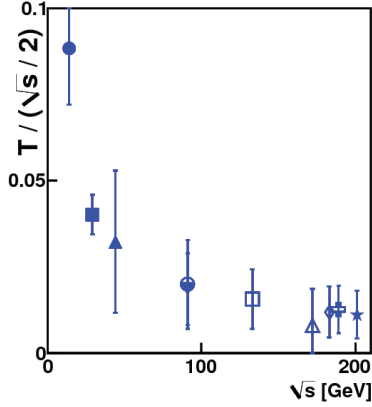
függvényalak elfogadható leírást ad. A T paraméter skálafüggését a



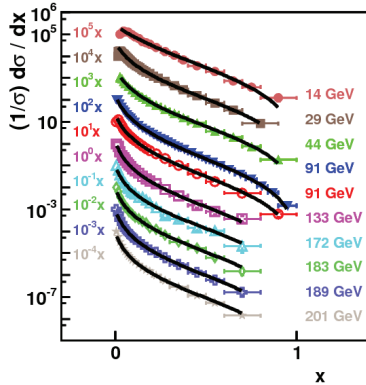
5.10. ábra. A különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények és a rájuk illesztett Tsallis-Pareto eloszlások ((5.5) egyenlet a $D = 1$ érték mellett) hányadosai. A spektrumok a [105]-[111] cikkekben lettek közzéadva. Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



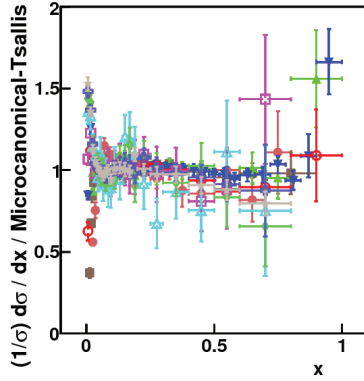
5.11. ábra. Az (5.5) eloszlás q paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.9. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből. (Az illesztés a $D = 1$ érték mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



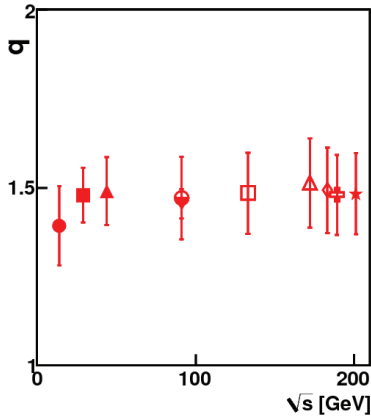
5.12. ábra. Az (5.5) eloszlás T paraméterének skálatejlődése az eloszlás 5.9. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből. (Az illesztés a $D = 1$ érték mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



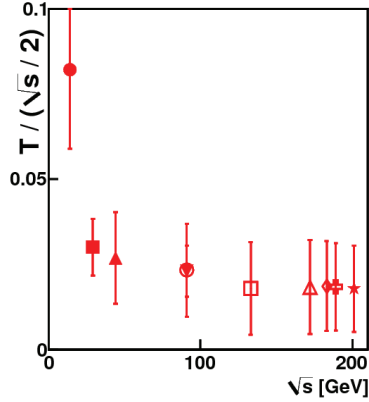
5.13. ábra. Különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények (a spektrumokat fentről lefele a [105, 106, 105, 107, 108, 109, 110, 110, 110, 111] cikkekben közölték), és a rájuk illesztett mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((5.8) eloszlás a $D = 1$ és $N_0 = 3$ értékek mellett). Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



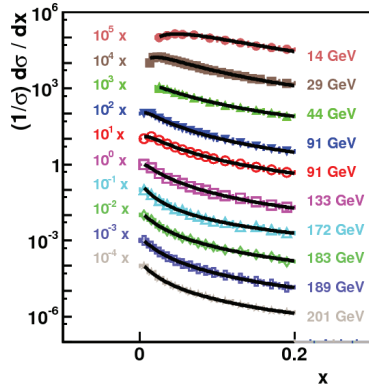
5.14. ábra. A különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények és a rájuk illesztett mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((5.8) egyenlet a $D = 1$ és $N_0 = 3$ értékek mellett) hányadosai. A spektrumok a [105]-[111] cikkekben lettek közölve. Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



5.15. ábra. Az (5.8) eloszlás q paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.13. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből. (Az illesztés a $D = 1$ és $N_0 = 3$ értékek mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



5.16. ábra. Az (5.8) eloszlás T paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.13. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből. (Az illesztés a $D = 1$ és $N_0 = 3$ értékek mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



5.17. ábra. Különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények (a spektrumokat fentről lefele a [105, 106, 105, 107, 108, 109, 110, 110, 110, 111] cikkekben közzétették), és a rájuk illesztett kanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((5.5) eloszlás, 3 és 1 között $D \sim 1/\sqrt{s}$ szerint csökkenő effektív dimenzió paraméter mellett). Az ábra a [92] cikkben jelent meg.

$$T^* = T/p_{T\,jet} = (p_{T\,jet}/Q_0)^\mu \quad (5.11)$$

függvény írja le. A [78] cikkben a Tsallis eloszlás alakú (5.6) fragmentációs függvényt illesztettük AKK típusú fragmentációs függvényre és az (5.7) alakú skálafüggést kaptuk az eloszlás q és T paramétereire. Míg (5.7) öszhangban áll a q paraméterre proton-proton ütközésekben kapott (5.9) eredménnyel, a mérésekből a T paraméterre kapott (5.11) összefüggés ellentmondani látszik a [78] cikkben kapott eredménynek. A [78] cikkben használt (5.6) függvény azonban csak alacsony-energiás közelítése a fragmentációs függvénynek, helyette az (5.8) alakú mikrokanonikus változatot kellene használni ahhoz, hogy az AKK függvények skálafejlődését ily módon összevethessük a [92] - [95] cikkekben használt fragmentációs modell kísérletekre történt illesztéséből kaptottal. Ez azonban egyelőre csak tervezett projekt.

Töltött hadronok multiplicitás-eloszlása

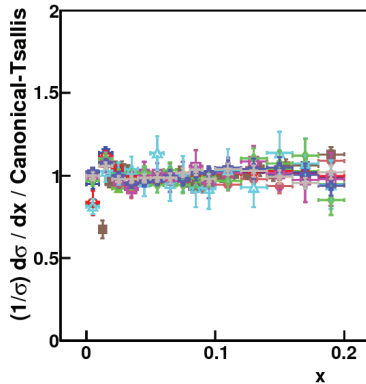
A 3. fejezetben megmutattam, hogy ha egy eseményben a részecskék Boltzmann, vagy mikrokanonikus eloszlás szerint keletkeznek, és ezen felül a multiplicitás eseményről-eseményre a (3.1), vagy a (3.2) eloszlás szerinti fluktuál, az átlagspektrumok a (3.9) Tsallis-Pareto, vagy a (3.13) mikrokanonikus Tsallis-Pareto alakúak lesznek.

A [124] - [130] cikkekben közölt töltött hadron-multiplicitás eloszlásokat és a rájuk illesztett

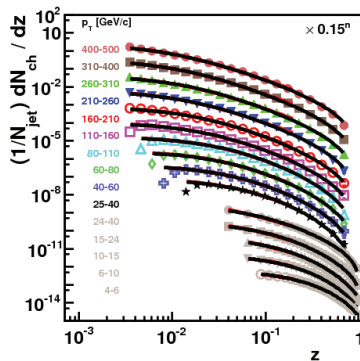
$$p(N) = A (N - N_0)^{\alpha-1} \exp\{-\beta (N - N_0)\} \quad (5.12)$$

Euler-Gamma eloszlásokat, valamint azok paramétereinek \sqrt{s} függését az 5.22 - 5.29. ábrák mutatják. Az 5.9. ábrán látható Tsallis-Pareto eloszlást a szuper-statisztikus megközelítés szerint (3. fejezet) az (5.12) multiplicitás-eloszlásból az $N_0 = 0$ esetben kapjuk, míg az 5.13. ábrán látható mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlást az $N_0 = 3$ választás eredményezi (az $N_0 = 3$ érték az $N_0 = 1 + 2/D$ választás következménye $D = 1$ dimenzióban; ld. [92] cikk). Az (5.12) eloszlás láthatóan jól illeszthető a széles ütközési energia tartományt lefedő kísérleti adatokra mind az $N_0 = 0$ (ld. 5.22 - 5.25. ábrák), mind az $N_0 = 3$ (ld. 5.26 - 5.29. ábrák) esetben.

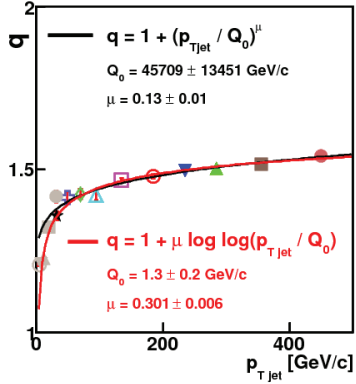
Mindemellett a multiplicitás-eloszlások illesztései alapján a (3.9) és (3.13) hadroneloszlások hatványára 12 és 10 körüli értéket kapunk (ld. 5.24. és 5.28. ábra), ezzel szemben a hadroneloszlásokra illesztve az (5.5) és (5.8) képleteket a hatvány $1/(q-1)$ értékére 2-4 és 2 körüli értéket kapunk (ld. 5.11. és 5.15. ábra).



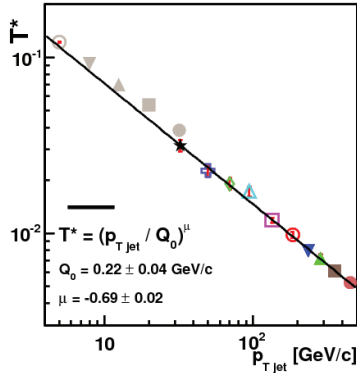
5.18. ábra. A különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények és a rájuk illesztett Tsallis-Pareto eloszlások ((5.5) eloszlás, 3 és 1 között $D \sim 1/\sqrt{s}$ szerint csökkenő effektív dimenzió paraméter mellett) hányadosai. A spektrumok a [105]-[111] cikkekben lettek közölve. Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



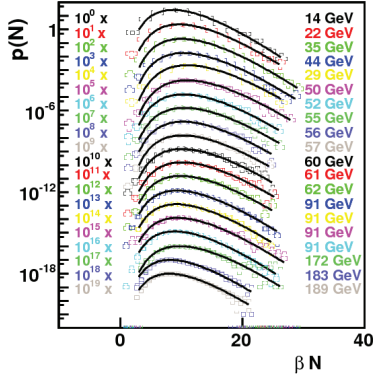
5.19. ábra. Különböző *jet* transzverz momentum ($p_{T,jet}$) esetében mért fragmentációs függvények (a spektrumokat a [122, 123] cikkekben közzétették), és a rájuk illesztett mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((5.8) eloszlás $x = z$ és $D = 1$ mellett). Az ábra a [95] cikkben jelent meg.



5.20. ábra. Az (5.8) eloszlás q paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.19. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből. (Az illesztés a $D = 1$ érték mellett történt.) Az ábra a [95] cikkben jelent meg.



5.21. ábra. Az (5.8) eloszlás $T^* = T/p_{Tjet}$ paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.19. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből. (Az illesztés a $D = 1$ érték mellett történt.) Az ábra a [95] cikkben jelent meg.

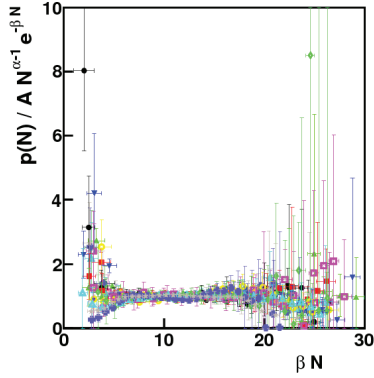


5.22. ábra. Különböző ütközési energiákon mért töltött hadron multiplicitás-eloszlások (a spektrumokat fentről lefele sorrendben a [124, 124, 124, 124, 125, 126, 126, 126, 126, 126, 126, 126, 127, 128, 129, 130, 110, 110, 110] cikkekben közzétették) és a rájuk illesztett Euler-Gamma eloszlások (5.12) eloszlás az $N_0 = 0$ érték mellett). Az ábra a [92] cikkben jelent meg. Az ábra a [92] cikkben jelent meg.

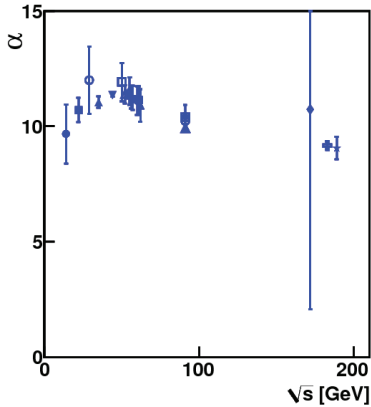
Azonosított hadronok fragmentációs függvényei

A részecskefajták szerint nem szétválogatott, töltött hadronok fragmentációs függvényeinek vizsgálata után a π^0 és K^0 részecskék eloszlásait is megvizsgáltam. A [112] - [121] cikkekben közzétett spektrumokat, és a rájuk illesztett (5.8) eloszlást az 5.30 - 5.33. ábrák mutatják. Bár az 5.33. ábrán látható T paraméter a $\sqrt{s} \leq 44$ GeV energiás spektrumok rövidege miatt csak nagy bizonytalansággal határozható meg, s értéke fluktuál, ezért megállapítható, hogy a π^0 és K^0 részecskék q és T paraméterei hasonló skálafejlődést mutatnak, mint az 5.11., 5.12., 5.15. és 5.16. ábrákon látható, nem-azonosított töltött hadronok paraméterei.

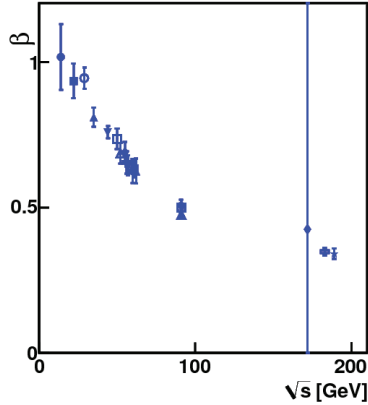
A jelenleg rendelkezésre álló kísérleti adatok alapján nem dönthető el, helytálló-e a szuper-statisztikus megközelítés, mivel egyrészt az azonosított részecskék multiplicitásának eloszlásai nem ismertek, és így nem ellenőrizhető, hogy ténylegesen illeszkednek-e a (3.1) negatív binomiális, vagy a (3.2) Euler-Gamma eloszlásra, másrészt a fix multiplicitású *jetek* hadroneloszlásait sem ismerjük, s emiatt nem tudhatjuk, hogy azok ténylegesen mikrokanonikusak-e, vagyis hogy tényleg a multiplicitás-fluktuációk okozzák-e a fragmentációs függvények (5.8) alakját.



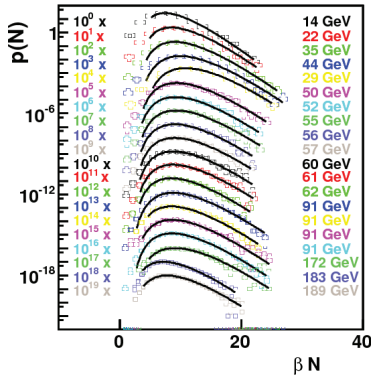
5.23. ábra. A különböző ütközési energiákon mért töltött hadron multiplicitás-eloszlások és a rájuk illesztett Euler-Gamma eloszlások ((5.12) eloszlás az $N_0 = 0$ érték mellett) hányadosai. A spektrumok a [110] és [124]-[130] cikkekben lettek közölve. Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



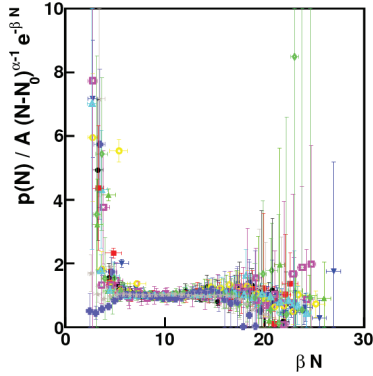
5.24. ábra. Az (5.12) eloszlás α paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.22. ábrán látható töltött hadron multiplicitás-eloszlásokra történt illesztéséből. (Az illesztés az $N_0 = 0$ értékek mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



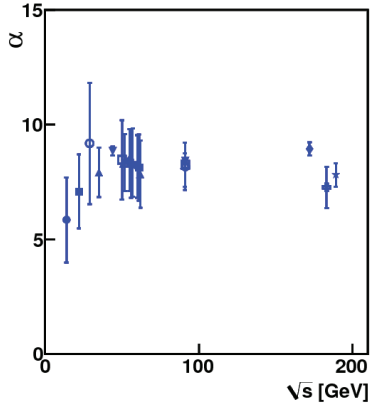
5.25. ábra. Az (5.12) eloszlás β paraméterének skáafejlődése az eloszlás 5.22. ábrán látható töltött hadron multiplicitás-eloszlásokra történt illesztéséből. (Az illesztés az $N_0 = 0$ értékek mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



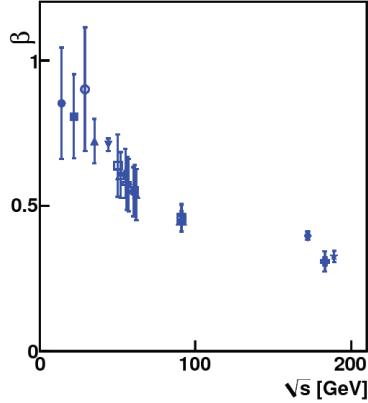
5.26. ábra. Különböző ütközési energiákon mért töltött hadron multiplicitás-eloszlások (a spektrumokat fentről lefele sorrendben a [124, 124, 124, 124, 125, 126, 126, 126, 126, 126, 126, 126, 127, 128, 129, 130, 110, 110, 110] cikkekben közölték), és a rájuk illesztett Euler-Gamma eloszlások ((5.12) eloszlás az $N_0 = 3$ érték mellett). Az ábra a [92] cikkben jelent meg. Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



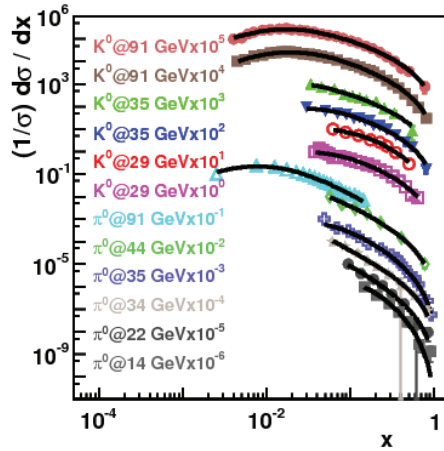
5.27. ábra. A különböző ütközési energiákon mért töltött hadron multiplicitás-eloszlások és a rájuk illesztett Euler-Gamma eloszlások ((5.12) eloszlás az $N_0 = 3$ érték mellett) hányadosai. A spektrumok a [110] és [124]-[130] cikkekben lettek közölve. Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



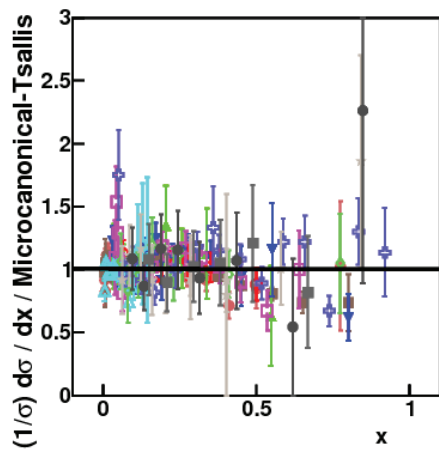
5.28. ábra. Az (5.12) eloszlás α paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.26. ábrán látható töltött hadron multiplicitás-eloszlásokra történt illesztéséből. (Az illesztés az $N_0 = 3$ értékek mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



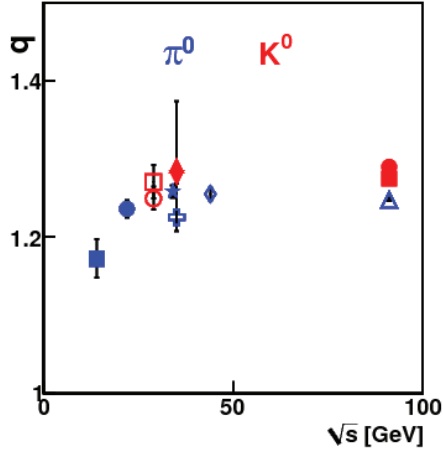
5.29. ábra. Az (5.12) eloszlás β paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.26. ábrán látható töltött hadron multiplicitás-eloszlásokra történt illesztéséből. (Az illesztés az $N_0 = 3$ értékek mellett történt.) Az ábra a [92] cikkben jelent meg.



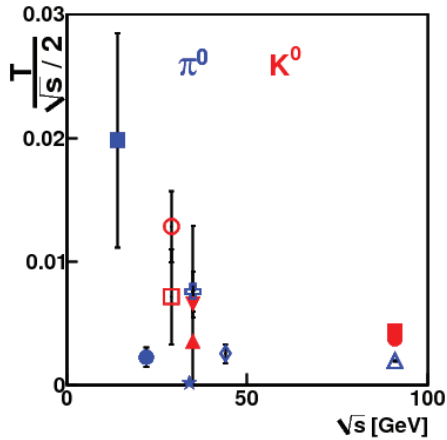
5.30. ábra. Különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények π^0 és K^0 részecskékre (a spektrumokat fentről lefele sorrendben a [112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 121, 121] cikkekben közölték), és a rájuk illesztett mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((5.8) eloszlás a $D = 3$ és $N_0 = 1 + 1/D$ paraméterek mellett [94]).



5.31. ábra. A különböző ütközési energiákon mért fragmentációs függvények π^0 és K^0 részecskékre és a rájuk illesztett mikrokanonikus Tsallis-Pareto eloszlások ((5.8) eloszlás a $D = 3$ és $N_0 = 1 + 1/D$ paraméterek mellett) hányadosai [94]. A spektrumok a [112]-[121] cikkekben lettek közölve.



5.32. ábra. Az (5.8) eloszlás q paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.30. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből [94]. (Az illesztés a $D = 3$ és $N_0 = 1 + 1/D$ értékek mellett történt.)



5.33. ábra. Az (5.8) eloszlás T paraméterének skálafejlődése az eloszlás 5.30. ábrán látható spektrumokra történt illesztéséből [94]. (Az illesztés a $D = 3$ és $N_0 = 1 + 1/D$ értékek mellett történt.)

6. fejezet

Zárszó

Az erős kölcsönhatás leírására felállított mértékelmélet, a kvantum színdinamika (QCD) keretei között nem kezelhető a hadronizáció folyamata, mivel ezen folyamat energiaskálája a $\Lambda_{QCD} \approx 200$ MeV nagyságrendjébe esik, a QCD pedig ezen a tartományon nem oldható meg a perturbáció-számítás segítségével. A hadronizáció megértése nélkül azonban esélytelen a RHIC és LHC energiás nehézion ütközésekben keletkező kvark-gluon plazma tanulmányozása. A perturbatív QCD (pQCD) alapú parton-modell számolásokban a hadronkeltést elektron-pozitron annihilációs kísérletekben mért hadronspektrumok alapján paraméterezett, fenomenológikus függvényekkel írják le. Bár ezen függvények skálafejlődését a pQCD meghatározza, adott skálán való konkrét alakjukra nem ismert elméleti magyarázat.

A dolgozat 4.3. részében és a [92] cikkben egy alternatív statisztikus fragmentációs modellt mutatok be, amely szintén alkalmazható egyensúlytól távoli rendszerekre. Keretei közt jól leírhatók a $\sqrt{s} \in [14 \text{ GeV}, 200 \text{ GeV}]$ ütközési energiás elektron-pozitron ütközésekben mért fragmentációs függvények és hadron multiplicitás-eloszlások. A modell alacsonyenergiás (kanonikus) közelítéséről a [78] cikkben megmutattuk, hogy megfelelő paraméterezés esetén kielégíti a QCD skálafejlődését leíró Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi féle (DGLAP) egyenletet, valamint hogy segítségével a pQCD alapú parton-modell számolásokban kvalitatíve hasonló töltött pion spektrumok kaphatók, mint az irodalomban leggyakrabban használt Albino-Kniehl-Kramer féle fragmentációs függvények használata esetén.

A modell alapfeltevése szerint egy fix N db. hadronra fragmentálódó *jet*-ben keletkező h_1, \dots, h_N hadron keltésének hatás keresztmetszetét, $d\sigma^{h_1, \dots, h_N} \propto \delta(\sum \epsilon_{h_i} - E_{jet}) d\Omega_{h_1, \dots, h_N}$ (ahol egy keletkező h_i hadron energiája ϵ_i), kizárólag a *jet* E_{jet} energiájának megmaradása által megszorított Ω_{h_1, \dots, h_N} hadronikus fázistér-faktor határozza meg. Ebből az egy *jet*-en belüli mikrokanonikus hadroneloszlásból aztán az Euler-Gamma eloszlás szerint fluktuáló multiplicitás alakítja ki a kísérletekben mért átlagos hadroneloszlásokat.

Az 5. fejezetben látható, hogy a statisztikus fragmentációs modell jól leírja a rendelkez-

zésre álló elektron-pozitron annihilációs kísérletek mérési adatait. Parton-modell számlásokban való alkalmazhatóságát jelenleg is vizsgáljuk. A modell pontosabb teszteléséhez viszont szükséges a *jet*ekbeni hadroneloszlások megmérése különböző, fix multiplicitású *jet*ek esetén, annak érdekében, hogy az eseményről-eseményre történő multiplicitás-fluktuációk hatását leválaszthassuk a hadronizáció folyamatát meghatározó egyéb effektusokról.

7. fejezet

Appendix

7.0.1. Ultra-relativisztikus klasszikus gáz mikrokanonikus sokasága

Tömegetlen, szabad, nem-kölcsönható relativisztikus részecskék eloszlását a

$$\frac{dN}{d^3\vec{p}} = A (1 - x)^{D(N-1)-1} \quad (7.1)$$

képlet írja le. $x = \epsilon(\vec{p})/E$ az egy részecskére eső hányad az össz E energiából, N a részecskék száma, és $\epsilon(\vec{p}) = p$ az ultra-relativisztikus diszperziós reláció. Az (7.1) eredmény onnan jön, hogy $dN/d^3p = \Omega_{N-1}(E - \epsilon)/\Omega_N(E)$, és $\Omega_N(E) \sim E^{DN-1}$, hiszen az N részecskés állapotszám,

$$\begin{aligned} \Omega_N(E) &= \int \prod_{i=1}^N d^D\vec{p} \, \delta\left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j - E\right) \\ &= \kappa_D^N \int_0^E dp_1 p_1^{D-1} \dots \int_0^{E-\epsilon_1 \dots -\epsilon_{N-1}} dp_N p_N^{D-1} \delta\left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j - E\right) \\ &= \kappa_D^N \int_0^E dp_1 p_1^{D-1} \dots \int_0^{E-\epsilon_1 \dots -\epsilon_{N-2}} dp_{N-1} p_{N-1}^{D-1} (E - \epsilon_1 - \dots - \epsilon_{N-1})^{D-1} \\ &= \kappa_D^N \int_0^E dp_1 p_1^{D-1} \dots (E - \epsilon_1 - \dots - \epsilon_{N-2})^{2D-1} \int_0^1 d\xi \xi^{D-1} (1 - \xi)^{D-1} \\ &\vdots \\ &= \text{konst } E^{DN-1}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

κ_D a momentumtér integrál szögekre elvégzett része.

7.0.2. Nem-extenzív ultra-relativisztikus klasszikus gáz mikrokanonikus sokasága

Entropikusan additív / apriori korrelálatlan, viszont az $E_{12} = E_1 + E_2 + aE_1E_2$ szabály szerint kölcsönható, tömegtelen relativisztikus részecskék sokaságát tekintjük. Egy részecske eloszlását itt is a (7.1) képletből számoljuk, így szükségünk van az állapotszáma,

$$\begin{aligned}\Omega_N(E) &= \int \prod_{i=1}^N d^D \vec{p} \, \delta \left(\sum_{j=1}^N L(\epsilon_j) - L(E) \right) \\ &= \kappa_D^N \int_0^E dp_1 p_1^{D-1} \dots \int_0^{L^{-1}[L(E)-L(\epsilon_1)\dots-L(\epsilon_{N-1})]} dp_N p_N^{D-1} \delta \left(\sum_{j=1}^N L(\epsilon_j) - L(E) \right)\end{aligned}\quad (7.3)$$

ahol $L(\epsilon) = 1/a \ln(1+a\epsilon)$ az energia összeadási szabályt additívba vivő formális logaritmus. A számoláshoz áttérünk momentum szerinti integrálról L szerintire, és az $L(E) \rightarrow L$ és $L(\epsilon_j) \rightarrow L_j$ jelölést használjuk.

$$\begin{aligned}\Omega_N(E) &= \left(\frac{\kappa_D}{a^{D-1}} \right)^N \int_0^L dL_1 e^{aL_1} (e^{aL_1} - 1)^{D-1} \dots \int_0^{L-L_1\dots-L_{N-1}} dL_N e^{aL_N} (e^{aL_N} - 1)^{D-1} \\ &\quad \times \delta \left(\sum_{j=1}^N L(\epsilon_j) - L(E) \right).\end{aligned}\quad (7.4)$$

$D = 1$ dimenzióban az állapotszám

$$\begin{aligned}\Omega_N(E) &\sim \int_0^L dL_1 e^{aL_1} \dots \int_0^{L-L_1\dots-L_{N-1}} dL_N e^{aL_N} \times \delta \left(\sum_{j=1}^N L(\epsilon_j) - L(E) \right) \\ &= \int_0^L dL_1 e^{aL_1} \dots \int_0^{L-L_1\dots-L_{N-2}} dL_{N-1} e^{a(L-L_1-\dots-L_{N-2})}.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Az exponenciális faktorkok kiejtik egymást és marad az

$$\Omega_N(E) \sim e^{aL} \int_0^L dL_1 \int_0^{L-L_1} dL_2 \dots \int_0^{L-L_1 \dots -L_{N-2}} dL_{N-1}, \quad (7.6)$$

amit lépésről-lépésre kiintegrálva:

$$\begin{aligned} & \dots \int_0^{L-L_1 \dots -L_{N-3}} dL_{N-2} (L - L_1 - \dots - L_{N-2}) \\ & \dots (L - L_1 - \dots - L_{N-3})^2 \int_0^1 d\xi (1 - \xi), \end{aligned} \quad (7.7)$$

a végeredmény 1 dimenzióban:

$$\Omega_N(E) \sim e^{aL(E)} L^{N-1}(E). \quad (7.8)$$

7.0.3. 2+2 dimenziós koordináták Minkowski téridőben

A nehézion ütközésekben keletkező QGP nyaláb irányban sokkal gyorsabban tágul, mint az ütközésre merőlegesen, ezért érdemes henger koordinátákat használni:

$$x^\mu = (\tau \cosh \zeta, \tau \sinh \zeta, r \cos \alpha, r \sin \alpha) \quad (7.9)$$

a $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ longitudinális sajátidő, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ henger rádiusz, $\zeta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right)$ pszeudo koordináta rapiditás és α azimutális szöggel paraméterezve a téridőt. Az $y^\mu = \{\tau, \zeta, r, \alpha\}$ koordinátákra az

$$A^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \tau \sinh \zeta & & \\ \sinh \zeta & \tau \cosh \zeta & & \\ & & \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ & & \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

mátrixsal térhetünk át. A visszatérés mátrixát a $\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\rho} = \delta^\mu_\rho = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ deriválási szabályból következő $A^\mu_\nu (A^{-1})^\nu_\rho = \delta^\mu_\rho$ összefüggésből megkapva,

$$(A^{-1})^\mu{}_\nu = \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & & \\ -\frac{\sinh \zeta}{\tau} & \frac{\cosh \zeta}{\tau} & & \\ & & \cos \alpha & \sin \alpha \\ & & -\frac{\sin \alpha}{r} & \frac{\cos \alpha}{r} \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Az $s = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ sajátidő szerinti deriválás az u^μ sebességmező mentén

$$\frac{d}{ds} = u^\mu \partial_\mu = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = u^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} = u^\mu (A^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu}. \quad (7.12)$$

A sebességfüggetlen rész,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (A^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\sinh \zeta}{\tau} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ -\sinh \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\cosh \zeta}{\tau} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

A *Blast Wave* sebességprofil

$$u^\mu = (\gamma \cosh \zeta, \gamma \sinh \zeta, \gamma v \cos \alpha, \gamma v \sin \alpha) \quad (7.14)$$

sebességtere esetében az áramlás menti sajátidő szerinti derivált

$$\frac{d}{ds} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (7.15)$$

és ezért a sebesség az s sajátidőben állandó:

$$\frac{d}{ds} u^\mu = 0. \quad (7.16)$$

A sebességtér divergenciája,

$$\partial_\mu u^\mu = \frac{\gamma}{\tau} + \frac{\gamma v}{r}. \quad (7.17)$$

Az y^μ koordinátákkal a radiális divergencia,

$$x^\mu \partial_\mu = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (7.18)$$

7.0.4. Ekvipartíció Tsallis-Pareto eloszlásra

A formális logaritmuson keresztül kölcsönható, tömegtelen, relativisztikus részecskékre az

$$L(\epsilon) = \frac{1}{a} \ln(1 + a\epsilon) . \quad (7.19)$$

speciális esetben a részecskék eloszlására kirótt

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3p f(\epsilon) , \\ \frac{L(E)}{N} &= \int d^3p \epsilon f(\epsilon) , \end{aligned} \quad (7.20)$$

feltételekből az

$$f(\epsilon) = A \exp\{-\beta L(\epsilon)\} \quad (7.21)$$

alakú eloszlás normafaktora

$$A = \frac{a^{D-1}}{\kappa_D} \left[\sum_{j=0}^{D-1} \binom{D-1}{j} (-)^{D-j-1} \frac{1}{\beta - (j+1)a} \right]^{-1} = \frac{\prod_{j=0}^{D-1} [\beta - (j+1)a]}{\kappa_D (D-1)!} , \quad (7.22)$$

valamint az egy részecskére eső átlagos „kvázi-energia”

$$\frac{L(E)}{N} = \frac{1}{a} \frac{\sum_{j=0}^D \binom{D}{j} (-)^{D-j} \frac{1}{\beta - (j+1)a}}{\sum_{j=0}^{D-1} \binom{D-1}{j} (-)^{D-j-1} \frac{1}{\beta - (j+1)a}} = \frac{DT}{1 - (D+1)aT} = \frac{DT}{1 - (D+1)(q-1)} . \quad (7.23)$$

Az utolsó egyenlőség abban az esetben nem áll fenn, ha a fundamentális paramétere a rendszernek, és nem származtatható az $a = (q-1)/T$ összefüggésből.

A (7.21)-ből következik, hogy $\beta \propto N$, így a (7.20)-ból az amplitudo, $A \propto \beta^D \propto N^D$ vagyis a részecskék eloszlása

$$f_N(\epsilon) \propto N^D \exp\{-N L(\epsilon) \times konst\} . \quad (7.24)$$

Ebből következően, ha a multiplicitás Euler-Gamma eloszlás szerint fluktuál, az átlagos spektrum

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d^D p} = \sum_N p(N) N f_N(\epsilon) &\approx \int_0^\infty dN N^{\alpha-1} \exp\{\bar{\beta} N\} \times N \times N^D \exp\{-N L(\epsilon) k\} \\ &\propto \frac{1}{[1 + b \ln(1 + a\epsilon)]^{\alpha+D+1}} . \end{aligned} \quad (7.25)$$

Ha a részecskék között az $E_{12} = E_1 + E_2 - a E_1 E_2$ vonzó kölcsönhatás van, eredményképpen az elektron-positron ütközésekben tapasztalt spektrumok alakját kapjuk:

$$\frac{dN}{d^D p} \approx \frac{A}{[1 - b \ln(1 - a\epsilon)]^{\alpha+D+1}} . \quad (7.26)$$

Köszönetnyilvánítás

Ezen értekezés elkészítéséhez nyújtott segítségét köszönöm Biró Tamás Sándornak, Barnaföldi Gergely Gábornak, Ván Péternek, Lévai Péternek, Tóth Bálintnak, Jakovác Antalnak és családomnak.

Irodalomjegyzék

- [1] D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **10** 1103 30 1343
- [2] Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz, K. K. Szabó, *JHEP* **0601** 089 (2006)
- [3] F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, *Phys. Lett. B*, **478** 447, (2000)
- [4] S. Ejiri, F. Karsch, K. Redlich, *Phys. Lett. B*, **633** 275 (2006)
- [5] J. Adams et. al. (STAR Collaboration), *Phys. Rev. Lett.*, **91** 072304 (2003);
Fizikai Szemle 2004, **1** 19 (2004)
- [6] P. Levai, G. Papp, G. Fai, M. Gyulassy, G.G. Barnaföldi, I. Vitev, Y. Zhang,
Nucl. Phys. A **698** 631-634 (2002)
- [7] B. Müller, *The Physics of the Quark-Gluon Plasma* (Lecture Notes in Physics
225), Springer-Verlag, (1985)
- [8] T. S. Biró et. al., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **32** No.: 12 S205-S212 (2006)
- [9] T. S. Biró et. al., *Phys. Rev. C*, **75**, 034910, (2007)
- [10] T. S. Biró, A. László, P. Ván, arXiv:hep-ph/0612085v1, (2006)
- [11] L. D. Landau, E. M. Lifsic, *Elméleti Fizika VI, Hidrodinamika*, Tankönyv-
kiadó, Budapest, (1980)
- [12] F. Cooper, G. Frye, *Phys. Rev. D* **10**, 186, 1974.
- [13] L. P. Csernai, I. Lovas, J. A. Maruhn, A. Rosenhauer, J. Zimanyi, W. Greiner,
Phys. Rev. C: **26**, 149 (1982)
- [14] P. F. Kolb, J. Sollfrank, P. V. Ruuskanen, U. Heinz, *Nucl. Phys. A*: **661**, 1-4,
349-352 (1999)
- [15] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 379, 623, 1948.

- [16] E. T. Jaynes, *Phys. Rev* **160** 171, 1957; **168** 620, 1957.
- [17] C. Tsallis, *Intro. to Nonextensive Stat. Mech.*, Springer, 2009.
- [18] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [19] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 50, 1988.
- [20] C. Tsallis, *Physica A* **221**, 277, 1995.
- [21] C. Tsallis, *Braz. J. Phys.* **29**, 1, 1999.
- [22] P. Parato, C. Tsallis *Phys. Rev. E* **60**, 2398, 1999.
- [23] V. Latora, A. Rapisorda, C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **64**, 056134, 2001; *Physica A* **305**, 129, 2002.
- [24] C. Tsallis, *Eur. Phys. J. A*, **40**, 257-266 (2009)
- [25] C. Tsallis, M. Gell-Mann, Y. Sato, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **102**, 15377, 2005.
- [26] A. Renyi, *Acta Math. Sci. Hung.* **10**, 193, 1959.
- [27] Z. Daroczy, J. Aczel, *On Measurement of Information and their Characterization* Academic Press, New York, 1975.
- [28] R. A. Fischer, *Statistical Methods and Scientific Inference*, Oliver and Boyd, Edinburgh-London, 1959.
- [29] P. Van, *Physica A* **365**, 28, 2006.
- [30] A. Renyi, *Probability Theory* North Holland, Amsterdam, 1970.
- [31] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 221, 1978.
- [32] C. Beck, E. G. D. Cohen, *Physica A* **322**, 267, 2003.
- [33] C. Beck, E. G. D. Cohen, *Physica A* **344**, 393, 2004.
- [34] H. Touchette, C. Beck, *Phys. Rev. E* **71**, 016131, 2005.
- [35] S. Abe, C. Beck, G. D. Cohen, *Phys. Rev. E* **76**, 031102, 2007.
- [36] P. Jizba, H. Kleinert, *Phys. Rev. E* **78**, 031122, 2008.

- [37] W. M. Alberico, A. Lavagno, *Eur. Phys. J. A*: **40** 313-323, 2009.
- [38] G. Kaniadakis, *Eur. Phys. J. A*: **40** 275-287, 2009.
- [39] T.S. Biró and P. Ván, *Physical Review E*, **83**, 061187, (2011)
- [40] T. S. Biro, *Euro. Phys. Lett.* **84**, (2008) 56003
- [41] H. Kohyama, A. Niegawa, *Prog. Theor. Phys.*: **115**, 73-88, 2006.
- [42] T. S. Biró, G. Györgyi, A. Jakovác, G. Purcsel, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **31** 6 S759-S763, 2005.
- [43] T. S. Biro, A. Jakovac, *Phys. Rev. Lett.* **94**, (2005) 132302
- [44] T. S. Biró, Gábor Purcsel: cond-mat/0609700v1, Equilibration of two power-law tailed distribution in a parton cascade model, (2006)
- [45] T. S. Biro, G. Gyorgyi, A. Jakovac, G. Purcsel, arXiv: hep-ph/0409157v1, 2004.
- [46] T. S. Biró, arxiv: nucl-th/0507070v1.
- [47] J. A. S. Lima, R. Silva, A. R. Plastino, *Phys. Rev. Lett.* **86**, (2001) 29-38
- [48] G. Kaniadakis, *Physica A* **296**, (2001) 405; *Phys. Rev. E* **66**, (2002) 056125
- [49] T. S. Biro, G. Purcsel, *Phys. Rev. Lett.* **95**, (2005) 162302
- [50] A. Y. Khinchin: Mathematical foundation of statistical mechanics, New York Ed. Dover, 1949.
- [51] S. R. S. Varadhan, Asymptotic probability and differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*: **19**, 261-286, 1966.
- [52] Richard S. Ellis, Entropy, large deviations, and statistical mechanics, *Springer-Verlag*, 1985.
- [53] K. Urmossy, T. S. Biro, G. G. Barnaföldi, *Proc. of the Conf. on 'Hot and Cold Baryonic Matter'*, arXiv:1101.3522v2, 2011.
- [54] R. Hagedorn, *Suppl. Nuovo Cim.*: **3**, 147, 1965.
- [55] F. Becattini, Ulrich W. Heinz, *Z. Phys. C*: **76**, 269-286, 1997, *Erratum-ibid. C*: **76**, 578, 1997.

- [56] F. Becattini, J. Cleymans, A. Keranen, E. Suhonen, K. Redlich, *Phys. Rev. C*: **64**, 024901, 2001.
- [57] V. Greco, C. M. Ko, P. Levai, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 202302, 2003.
- [58] T.S. Biro, P. Levai, J. Zimanyi, *Phys. Lett. B*, **347** 6-12, (1995)
- [59] T. S. Biro, T. Csorgo, P. Levai, J. Zimanyi, *Phys. Lett. B*, **472** 243, (2000)
- [60] R. C. Hwa, C. B. Yang, *Phys. Rev. C* **75**, 054904, 2007.
- [61] R. J. Fries, B. Muller, C. Nonaka, S. A. Bass, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 202303, 2003.
- [62] R. J. Fries, B. Muller, C. Nonaka, S. A. Bass, *Phys. Rev. C* **68**, 044902, 2003.
- [63] R. J. Fries, S. A. Bass, B. Muller, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 122301, 2005.
- [64] B. Muller, R. J. Fries, S. A. Bass, *Phys. Lett. B* **618**, 77-83, 2005.
- [65] K. S. Lee, S. Bass, B. Muller, C. Nonaka, *J. Phys. G* **36**, 064034, 2009.
- [66] F. Becattini, *Z. Phys. C*: **69**, 485-492, 1996.
- [67] M. Shao, L. Yi, Z. Tang, H. Chen, C. Li, Z. Xu, *J. Phys. G*: **37**, 085104, 2010.
- [68] Z. Tang, Y. Xu, L. Ruan, G. Buren, F. Wang, Z. Xu, *Phys. Rev. C*: **79**, 051901 (R), 2009.
- [69] D. D. Chinellato, J. Takahashi, I. Bediaga, *J. Phys. G*: **37**, 094042, 2010.
- [70] T. Wibig, *J. Phys. G*: **37**, 115009, 2010.
- [71] K. Urmosy, T. S. Biro, *Phys. Lett. B*: **689**, 14-17, 2010.
- [72] B. De, G. Sau, S. K. Biswas, S. Bhattacharyya, P. Guptaroy, *J. Mod. Phys. A*: **25**, 1239-1251, 2010.
- [73] J. Cleymans, G. Hamar, P. Levai, S. Wheaton, *J. Phys. G*: **36**, 064 018, 2009.
- [74] M. Biyajima, T. Mizoguchi, N. Nakajima, N. Suzuki, G. Wilk, *Eur. Phys. J. C*: **48**, 597-603, 2006.

- [75] G. G. Barnaföldi, K. Urmosy, T. S. Biro, *Proceedings of Hot Quarks 2010*, doi:10.1088/1742-6596/270/1/012008, 2010.
- [76] T. S. Biro, G. Purcsel, K. Urmosy, *Eur. Phys. J. A* **40**, (2009) 325-340
- [77] G. Wilk, Z. Wlodarczyk *Eur. Phys. J A* **40**, 299, 2009.
- [78] G. G. Barnaföldi, G. Kalmar, K. Urmosy, T. S. Biro, *Proceedings of Gribov '80 Workshop*, 2010.
- [79] J. Zimányi et. al., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **31** No.: 7 711-718. 2005.
- [80] T.S. Biro, K. Urmosy, G.G. Barnaföldi, *J. Phys. G:* **35**, 044012, 2008.
- [81] T. S. Biro, K. Urmosy, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **36** 064044, 2009.
- [82] T. S. Biró, K. Űrmössy, *Eur. Phys. J.*, **155** 1, 2008.
- [83] C. Beck, *Physica A:* **286**, 164-180, 2000.
- [84] C. Beck *Eur. Phys. J. A:* **40**, 267, 2009.
- [85] I. Bediaga, E. M. F. Curado, J. M. Miranda, *Physica A:* **286**, 156-163, 2000.
- [86] V. V. Begun, M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein, *Phys. Rev. C:* **78**, 024904, 2008.
- [87] F. Becattini, L. Ferroni, *Eur. Phys. J. C:* **35**, 243-258, 2004.
- [88] F. Becattini, L. Ferroni, *Eur. Phys. J. C:* **38**, 225-246 2004.
- [89] F. M. Liu, K. Werner, J. Aichelin, *Phys. Rev. C:* **68**, 024905, 2003.
- [90] F. M. Liu, K. Werner, J. Aichelin, M. Bleicher, H. Stoecker, *J. Phys. G:* **30**, S589-S594, 2004.
- [91] F. M. Liu, K. Werner, *Phys. Rev. D:* **74**, 034024, 2006.
- [92] K. Urmosy, G. G. Barnaföldi, T. S. Biró, *Phys. Lett. B*, **701**, 111-116, (2011)
- [93] K. Urmosy, T. S. Biró, G. G. Barnaföldi, *Acta Physica Polonica B*, **5**:(2), pp. 363-368, (2012)
- [94] T.S. Biró, K. Urmosy, P. Ván, G.G. Barnaföldi, Z. Schram, *Acta Physica Polonica B*, **43**:(4), pp. 811-820, (2012)

- [95] K. Urmossy, G. G. Barnaföldi, T. S. Biró, submitted to *Phys. Lett. B*, arXiv:1204.1508 [hep-ph], (2012)
- [96] B. Andersson, G. Gustafson, C. Peterson, *Nucl. Phys. B*: **135**, 273, 1978.
- [97] B. Andersson, G. Gustafson, C. Peterson *Phys. C*: **1**, 105, 1979.
- [98] R. D. Field, R. P. Feynman, *Nucl. Phys. B*: **136**, 1, 1979.
- [99] A. Rényi, Foundations of Probability, Holden-Day (1970).
- [100] A. M. Polyakov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59**, 542 (1970).
- [101] Z. Koba, H. B. Nielsen, P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **40**, 317 (1972).
- [102] S. Hegyi, *Phys. Lett. B*: **467**, 126-131, 1999.
- [103] S. Hegyi, *Proc. ISMD 2000, Tihany, Lake Balaton, Hungary*, 2000
- [104] Yu.L. Dokshitzer, *Phys. Lett. B*, **305**, 295 (1993); LU-TP/93-3 (1993).
- [105] Braunschweig et. al., *Zeit. Phys. C*: **47**, 187, 1990.
- [106] Aihara et. al., *Phys. Rev. Lett.*: **61**, 1263, 1988.
- [107] Abreu et. al., *Phys. Lett.*: **311 B**, 408, 1993.
- [108] Akers et. al., *Zeit. Phys. C*: **68**, 203, 1995.
- [109] Alexander et. al., *Zeit. Phys. C*: **72**, 191, 1996.
- [110] G. Abbiendi et. al., *EPJ C*: **16**, 185, 2000.
- [111] G. Abbiendi et. al., *EPJ C*: **27**, 467, 2003.
- [112] Abreu et al [CERN-LEP-DELPHI], *Zeit. Phys. C*, **65**, 587, (1995)
- [113] Barate et al [CERN-LEP-ALEPH], CERN-PPE-96-186, (1996)
- [114] Behrend et al [DESY-PETRA-CELLO], *Zeit. Phys. C* **46**, 397, (1990)
- [115] Braunschweig et el [DESY-PETRA-TASSO], *Zeit. Phys. C* **47**, 167, (1990)
- [116] Aihara et al [SLAC-PEP-004 (TPC)], *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2378, (1984)
- [117] Schellman et al [SLAC-PEP-005 (MARK-II)], *Phys. Rev. D* **31**, 3013, (1985)

- [118] Acciarri et al [CERN-LEP-L3], *Phys. Lett.* 328B, 223, (1994)
- [119] Braunschweig et al [DESY-PETRA-TASSO], *Zeit. Phys.* C42, 189, (1989)
- [120] Behrend et al [DESY-PETRA-CELLO], *Zeit. Phys.* C47, 1, (1990)
- [121] Behrend et al [DESY-PETRA-CELLO], *Zeit. Phys.* C20, 207, (1983)
- [122] G. Aad et al. [ATLAS Collaboration], *Eur. Phys. J. C*, **71** 1795 (2011)
- [123] G. Aad et al. [ATLAS Collaboration], *Phys. Rev. D*, **84** 054001 (2011)
- [124] Braunschweig et. al., *Zeit. Phys. C*: **45**, 193, 1989.
- [125] Derrick et. al., *Phys. Rev. D*: **34**, 3304, 1986.
- [126] Zheng et. al., *Phys. Rev. D*: **42**, 737, 1990.
- [127] Abreu et. al., *Zeit. Phys. C*: **50**, 185, 1995.
- [128] Adeva et. al., *Zeit. Phys. C*: **55**, 39, 1992.
- [129] Buskulic et. al., *CERN-PPE*: 95-82, 1995.
- [130] Acton et. al. *Zeit. Phys. C*: 53, 539, 1992.
- [131] S. S. Adler et. al.(PHENIX), *Phys. Rev. C*: **69** 034909 (2004)
- [132] J. Adams et. al. (STAR), *Phys. Rev. Lett.* **92**, 112301 (2004).
- [133] PHENIX Collaboration 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 232301.
- [134] PHENIX Collaboration 2007 *Phys. Rev. C* **75** 024909.
- [135] STAR Collaboration 2005 *Nucl. Phys. A* 757 102.
- [136] STAR Collaboration 2007 *Phys. Lett. B* 655 104.
- [137] STAR Collaboration 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 062301.
- [138] STAR Collaboration 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 112301.
- [139] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], *JHEP* 1002: 041, (2010)
- [140] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], *JHEP* **08** 086 (2011)
- [141] T. Aaltonen et al, (CDF Collaboration) *Phys. Rev. D* **79** 112005, 2009.

- [142] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **61**: 1819, 1988.
- [143] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], arXiv:1005.3674 [hep-ex].
- [144] C. Albajar *et al.* [UA1 Collaboration] *Nucl. Phys. B* **335**: 261, 1990.
- [145] G. Bocquet *et al.* [UA1 Collaboration], *Phys. Lett. B* **366**: 434-440, 1996.
- [146] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration] *Phys. Lett. B* **688**: 21-42, 2010.
- [147] V. Ryabov (PHENIX Collaboration), *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **35** 044030 (2008)
- [148] A. Adare, et al, PHENIX Collaboration, *Phys. Rev. C* **78** 044902, (2008)
- [149] R. Ichou and D. d’Enterria, *Phys. Rev. D* **82**, 014015 (2010)
- [150] F. Arleo, D. d’Enterria, A. S. Yoon, *JHEP* **06** 035 (2010)
- [151] F. Arleo, S. J. Brodsky, D. S. Hwang, A. M. Sickles, *Phys. Rev. Lett.* **105** 062002 (2010)
- [152] S. Albino, B. A. Kniehl, G. Kramer, *Nucl. Phys. B*, **725**, 181 (2005).
- [153] S. Kretzer, *Phys. Rev. D*, **62**, 054001 (2000).
- [154] Y. Zhang et al, *Phys. Rev. C*, **65**, 034903 (2002).
- [155] V. N. Gribov, L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **15** 438 (1972).
- [156] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B* **126** 298 (1977)
- [157] Yu. L. Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP*, **46** 641 (1977).
- [158] G. G. Barnaföldi, Cronin-effektus nagyenergiás nehézion-ütközésekben, PhD értekezés, (2005)